ALGEBRA

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

a) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+2)$

Hvis $f(x)$ skal være delelig med $(x+2)$ må $x = -2$ være et nullpunkt for $f(x)$. Tester dette ved å sette inn $x = -2$ i polynomet.

$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) - 4 = -8 + 4 + 8 - 4 = 0$. $x+2$ er dermed en faktor i polynomet

b) Løs likningen $f(x) = 0$

Bruker polynomdivisjon for å faktorisere polynomet. Vet allerede at $(x+2)$ er en faktor i $f(x)$ og kan dele på denne.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+x^2-4x-4\right):(x+2)=x^2-x-2 \\
\underline{-\left(x^3+2x^2\right)} \\
\qquad -x^2-4x-4 \\
\qquad \underline{-\left(-x^2-2x\right)} \\
\qquad\qquad -2x-4 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x-4)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Da er $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+2)\left(x^2 - x - 2\right)$

Finner nullpunktene til $x^2 - x - 2$

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{1 \pm 3}{2} \\
x &= 2 \lor x = 1
\end{aligned}
$$

Tredjegradslikningen blir

$$
\begin{aligned}
x^3 + x^2 - 4x - 4 &= 0 \\
(x+2)(x-1)(x-2) &= 0
\end{aligned}
$$

med løsningene: $x = \underline{\underline{1}} \lor x = \underline{\underline{2}} \lor x = \underline{\underline{-2}}$

Flere av løsningsforslagene er hentet fra eksamensløsningene på ndla.no

Oppgave 2

Vi har gitt funksjonen $f(x)=3x^3+6x^2-3x-6$

1. Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$

Hvis $f(x)$ skal være delelig med $(x+1)$ må $x=-1$ være et nullpunkt for $f(x)$. Tester dette ved å sette inn $x=-1$ i polynomet.

$$f(-1)=3\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-6=-3+6+3-6=\underline{0}$$
$$\Rightarrow \qquad f(x) \text{ er delelig med } (x+1)$$

2. Løs likningen $f(x)=0$.

Vet fra punkt 1 at $f(x)$ kan deles på $(x+1)$. Bruker derfor polynomdivisjon til å faktorisere polynomet:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3+6x^2-3x-6):(x+1)=\underline{3x^2+3x-6} \\
\underline{-(3x^3+3x^2)} \\
\qquad 3x^2-3x-6 \\
\quad \underline{-(3x^2+3x)} \\
\qquad\quad -6X-6 \\
\qquad \underline{-(-6X-6)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Dette betyr at $f(x)=(3x^2+3x-6)\cdot(x+1)$

$$
\begin{array}{lllll}
f(x)=0 & \Rightarrow & 3x^2+3x-6=0 & \vee & x+1=0 \\
 & & x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-6)}}{2\cdot3} & \vee & x=\underline{\underline{-1}} \\
 & & x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+72}}{6} & & \\
 & & x=\dfrac{-3\pm9}{6} & & \\
 & & x=\underline{\underline{1}} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-2}} & &
\end{array}
$$

Oppgave 3

Tre venner handlet frukt. Kari kjøpte 2 kg epler, 3 kg pærer og 1 kg appelsiner. Hun betalte 81 kroner. Per kjøpte 1 kg epler, 2 kg pærer og 3 kg appelsiner. Han betalte 71 kroner. Lise kjøpte 1 kg av hver av fruktsortene. Hun måtte betale 37 kroner.

Sett opp et likningssett, og finn kiloprisen for epler, pærer og appelsiner.

Setter opp tre likninger der x er kilopris for eplene, y er kilopris for pærene og z er kilopris for appelsinene.

1: 2x+3y+z=81

2: x+2y+3z=71

3: x+y+z=37

Løser likning 3 med hensyn på x:

$$x = 37 - y - z$$

Så settes dette uttrykket inn for y i de to andre likningene.

Likning 1: $2(37 - y - z) + 3y + z = 81$

$$74 - 2y - 2z + 3y + z = 81$$

$$y - z = 7$$

$$y = 7 + z$$

Likning 2: $(37 - y - z) + 2y + 3z = 71$

$$y + 2z = 34$$

Vi har nå to likninger med to ukjente. Setter inn uttrykket for y fra likning 1 inn i likning 2:

$$7 + z + 2z = 34$$

$$3z = 27$$

$$z = 9$$

Kan da sette inn for z i likning 1 og finne y:

$$y = 7 + 9 = 16$$

Setter inn for z og y i likning 3 for å bestemme x:

$$x = 37 - 16 - 9 = 12$$

Eplene koster 12 kr per kg, pærene 16 kr per kg og appelsinene 9 kr per kg.

Oppgave 4

Forkort brøken

$$\frac{x^3-3x^2-13x+15}{x+3}$$

Hvis brøken lar seg forkorte, må $x+3$ være en faktor i telleren. Det er tilfelle hvis $x=-3$ er et nullpunkt i telleren. Jeg setter inn $x=-3$ i telleren.

$$\begin{aligned}(-3)^3-3\cdot(-3)^2-13\cdot(-3)+15&=-27-27+39+15\\&=-54+54\\&=\underline{0}\end{aligned}$$

Da vil polynomdivisjonen gå opp

$$\begin{array}{l}x^3-3x^2-13x+15:(x+3)=\underline{x^2-6x+5}\\ \underline{-(x^3+3x^2)}\\ \quad -6x^2-13x+15\\ \quad \underline{-(-6x^2-18x)}\\ \qquad 5x+15\\ \qquad \underline{-(5x+15)}\\ \qquad\quad 0\end{array}$$

Det betyr at $\dfrac{x^3-3x^2-13x+15}{(x+3)}=\underline{\underline{x^2-6x+5}}$

Oppgave 5

a) Forkort brøken ved å bruke polynomdivisjon

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$\begin{array}{l}(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1\\ \underline{-(x^3-x^2)}\\ \quad x^2-1\\ \quad \underline{-(x^2-x)}\\ \qquad x-1\\ \qquad \underline{-(x-1)}\\ \qquad\quad 0\end{array}$$

Det betyr at $\dfrac{x^3-1}{(x-1)}=\underline{\underline{x^2+x+1}}$

b) Bestem tallet a slik at divisjonen går opp

$$\left(x^2-2x+a\right):\left(x-3\right)$$

$$\begin{array}{l} \left(x^2-2x+a\right):\left(x-3\right)=x+1 \\ \underline{-\left(x^2-3x\right)} \\ \quad x+a \\ \quad \underline{-\left(x-3\right)} \\ \qquad a+3 \end{array}$$

$a+3=0 \Rightarrow \qquad a=-3$

Det betyr at divisjonen går opp hvis $a=\underline{\underline{-3}}$

Alternativt: Divisjonen går opp hvis $x=-\left(-3\right)=3$ er en løsning av likningen $x^2-2x+a=0$

$3^2-2\cdot 3+a=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=-9+6=\underline{\underline{-3}}$

c) Bestem tallet b slik at divisjonen går opp

$$\left(x^2-3x-4\right):\left(x-b\right)$$

Divisjonen går opp hvis $x=-\left(-b\right)=b$ er en løsning av likningen $x^2-3x-4=0$

$$b^2-3\cdot b-4=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=\frac{-\left(-3\right)\pm\sqrt{\left(-3\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(-4\right)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}$$

$b=\underline{\underline{4}} \quad$ eller $\quad b=\underline{\underline{-1}}$

Oppgave 6

Funksjonen P er gitt ved

$$P\left(x\right)=x^3-3x^2+4 \qquad , \qquad D_P=\mathbb{R}$$

a) Bestem $P\left(2\right)$.

$P\left(2\right)=2^3-3\cdot 2^2+4=8-12+4=0$

b) Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $P\left(x\right)$ i lineære faktorer.

Siden $P\left(2\right)=0$ er $\left(x-2\right)$ en faktor i $P\left(x\right)$. Jeg vet da at divisjonen $P\left(x\right):\left(x-2\right)$ «går opp»

$$\begin{array}{l} \left(x^3-3x^2+4\right):\left(x-2\right)=x^2-x-2 \\ \underline{-\left(x^3-2x^2\right)} \\ \quad -x^2+4 \\ \quad \underline{-\left(-x^2+2x\right)} \\ \qquad -2x+4 \\ \qquad \underline{-\left(-2x+4\right)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Det betyr at $x^3-3x^2+4=\left(x^2-x-2\right)\cdot(x-2)$

Jeg setter så $x^2-x-2=0$

$$x^2-x-2=0$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=-1$$

Det betyr at $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

Det betyr videre at $x^3-3x^2+4=\underline{\underline{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}}$

Oppgave 7

Løs likningen $2^{x^2-2x}=8$

$$2^{x^2-2x}=8$$

$$\left(x^2-2x\right)\ln 2=\ln 8$$

$$x^2-2x=\frac{\ln 2^3}{\ln 2}$$

$$x^2-2x=\frac{3\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}$$

$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-3=0$$

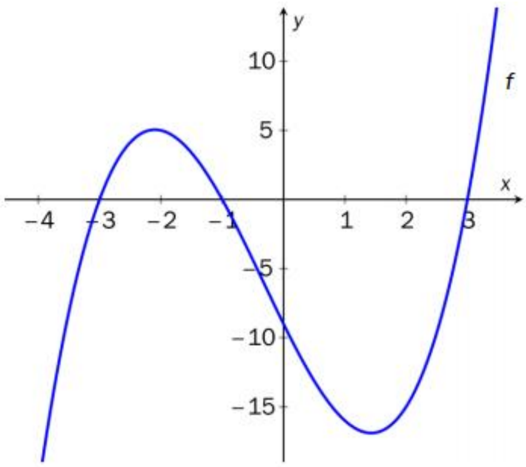
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$$x=\underline{\underline{3}} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-1}}$$

Oppgave 8

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f gitt ved

$$f(x)=x^3+x^2+kx+k, \qquad D_f=\mathbb{R} .$$



a) Faktoriser $f(x)$ med lineære faktorer.

$f(x)$ har nullpunktene $x=-3$, $x=-1$ og $x=3$. Det betyr at

$f(x)=(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$.

b) Bestem verdien for k ved regning.

Vi vet at $f(3)=0$. Det betyr at

$$\begin{aligned}(3)^3+(3)^2+k\cdot(3)+k&=0\\27+9+3k+k&=0\\4k&=-36\\k&=\underline{\underline{-9}}\end{aligned}$$

Oppgave 9 (HØST 2015)

a) Forklar at polynomet $x^3-ax^2+2ax-8$ alltid er delelig med $(x-2)$.

Jeg setter inn verdien 2 for x i polynomet

$2^3-a\cdot2^2+2a\cdot2-8=8-4a+4a-8=0$

Polynomet blir lik null for $x=2$. Det betyr at polynomet alltid er delelig med $(x-2)$.

b)

Forkort brøken

$$\frac{x^3-x^2+2x-8}{x-2}$$

$$\begin{aligned}&(x^3-x^2+2x-8):(x-2)=x^2+x+4\\&\underline{-(x^3-2x^2)}\\&\qquad x^2+2x-8\\&\qquad\underline{-(x^2-2x)}\\&\qquad\qquad 4x-8\\&\qquad\qquad\underline{-(4x-8)}\\&\qquad\qquad\qquad 0\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\frac{x^3-x^2+2x-8}{x-2}=\frac{(x^2+x+4).\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\underline{\underline{x^2+x+4}}$$

Oppgave 10

Tre gutter har tre ulike typer mynter med ulik verdi i lommene. Tabellen nedenfor viser fordelingen av myntene.

Regn ut verdien til de tre mynttypene ved å løse et likningssystem.

Navn	Antall mynt type 1	Antall mynt type 2	Antall mynt type 3	Sum i kr.
Ola	3	2	4	120
Per	2	3	2	75
Inge	2	5	3	105

Jeg lar verdien av mynt av type 1 være x kroner, av type 2 y kroner og av type 3 z kroner.
Opplysningene i tabellen gir da likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 3x+2y+4z=120 \\ 2x+3y+2z=75 \\ 2x+5y+3z=105 \end{bmatrix}$$

Anja sin løsning:

Bruker addisjonsmetoden og trekker ligning II fra III.

III-II: 2x-2x+5y-3y+3z-2z=105-75

2y+z = 30

z = 30-2y

Setter uttrykket for z inn i I og II:

3x+2y+4(30-2y)=120		2x+3y+2(30-2y)=75
3x+2y+120-8y=120		2x+3y+60-4y=75
3x=6y		2x-y=15
x=2y	→	2(2y)-y=15
x=10	←	y=5

Bruker uttrykket for z:

z=30-2y=20

NDLA sin løsning:

Jeg løser likningssystemet og finner verdien av de tre mynttypene.

$$3x+2y+4z=120 \quad \Rightarrow \quad y=60-\frac{3}{2}x-2z$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3\left(60-\frac{3}{2}x-2z\right)+2z=75 \\ 2x+5\left(60-\frac{3}{2}x-2z\right)+3z=105 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}x-4z=-105 \\ -\frac{11}{2}x-7z=-195 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5x+8z=210 \\ 11x+14z=390 \end{bmatrix}$$

$$5x+8z=210 \quad \Rightarrow \quad x=42-\frac{8}{5}z$$

$$\Downarrow$$

$$\left[11\left(42-\frac{8}{5}z\right)+14z=390\right] \Rightarrow \left[462-\frac{88}{5}z+14z=390\right] \Rightarrow [2310-88z+70z=1950] \Rightarrow 18z=360 \Rightarrow z=\underline{20}$$

$$\Rightarrow x=42-\frac{8}{5}\cdot 20=\underline{10} \Rightarrow y=60-\frac{3}{2}\cdot 10-2\cdot 20=60-15-40=\underline{5}$$

Verdien av mynt av type 1 er 10 kroner, av type 2 er verdien 5 kroner og av type 3 er verdien 20 kroner.

Oppgave 11

En buss stoppet tre steder på en rute. På første holdeplass kom det på ti barn, fire voksne og tre pensjonister. Til sammen betalte disse 225 kroner. På neste stoppested kom det på åtte barn, tre voksne og to pensjonister. Disse betalte til sammen 170 kroner. På siste holdeplass kom det på ni barn, fire voksne og tre pensjonister. Disse betalte til sammen 215 kroner.

Sett opp og løs et likningssystem, og bestem billettprisen for barn, voksne og pensjonister.

Jeg lar billettprisen for barn være x kroner, for voksne y kroner og for pensjonister z kroner. Opplysningene i oppgaven gir da likningssettet

$$\begin{bmatrix} 10x+4y+3z=225 \\ 8x+3y+2z=170 \\ 9x+4y+3z=215 \end{bmatrix}$$

Jeg løser likningssettet og finner billettprisene.

$$8x+3y+2z=170 \quad \Rightarrow \quad z=85-4x-\frac{3}{2}y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 10x+4y+3\left(85-4x-\frac{3}{2}y\right)=225 \\ 9x+4y+3\left(85-4x-\frac{3}{2}y\right)=215 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2x-\frac{1}{2}y=-30 \\ -3x-\frac{1}{2}y=-40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+y=60 \\ 6x+y=80 \end{bmatrix}$$

$$4x+y=60 \quad \Rightarrow \quad y=60-4x$$

$$\Downarrow$$

$$\left[6x+60-4x=80\right] \Rightarrow \left[2x=20\right] \Rightarrow x=\underline{10} \Rightarrow y=60-4\cdot 10=\underline{20} \Rightarrow z=85-4\cdot 10-\frac{3}{2}\cdot 20=\underline{15}$$

<u>Billettprisen for barn er 10 kroner, for voksne 20 kroner og for pensjonister 15 kroner.</u>

Oppgave 12

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x+y-z=13 \\ 2x+y+z=27 \\ x-3y-2z=-9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y-z=13 \\ 2x+y+z=27 \\ x-3y-2z=-9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x=13-y+z \\ 2(13-y+z)+y+z=27 \\ 13-y+z-3y-2z=-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-y+z \\ 26-2y+2z+y+z=27 \\ 13-y+z-3y-2z=-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-y+z \\ -y+3z=1 \\ -4y-z=-22 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-y+z \\ y=3z-1 \\ -4(3z-1)-z=-22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-y+z \\ y=3z-1 \\ -12z+4-z=-22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-y+z \\ y=3z-1 \\ -13z=-26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=13-5+2=\underline{\underline{10}} \\ y=3\cdot 2-1=\underline{\underline{5}} \\ z=\underline{\underline{2}} \end{bmatrix}$$

Oppgave 13

Ved en konsert var billettprisen 100 kroner for voksne, 50 kroner for barn og 60 kroner for pensjonister. Det ble solgt 80 billetter til konserten. Billettinntektene var i alt 5 000 kroner. Det ble solgt like mange billetter til barn som til voksne og pensjonister til sammen.

Sett opp et likningssystem og bruk dette til å bestemme antall voksne, antall barn og antall pensjonister som kjøpte billett til konserten.

Jeg lar billettprisen for voksne være x kroner, prisen for barn y kroner og prisen for pensjonister z kroner. Vi får da følgende likningssystem som jeg løser.

$$\begin{bmatrix} i) & 100x+50y+60z=5000 \\ ii) & x+y+z=80 \\ iii) & x+z=y \end{bmatrix}$$

Jeg setter likning $iii)$ i $i)$ og $ii)$

$$\begin{bmatrix} i) & 100x+50(x+z)+60z=5000 \\ ii) & x+x+z+z=80 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i) & 150x+110z=5000 \\ ii) & 2x+2z=80 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i) & 15x+11z=500 \\ ii) & z=40-x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 15x+11(40-x)=500 \quad \Rightarrow \quad 4x=60 \quad \Rightarrow \quad x=15,\ \ z=25,\ \ y=40$$

Likning $iii)$ ga verdien for x. Jeg setter denne verdien inn i likning $ii)$ $15+3z=75 \;\Rightarrow\; z=\underline{\underline{20}}$

Jeg setter verdiene for x og z inn i likning $i)$ $y=88-2\cdot 15-2\cdot 20=88-30-40=\underline{\underline{18}}$

<u>Det var 15 voksne 40 barn og 25 pensjonister som kjøpte billetter.</u>

Oppgave 14

Tre venner spiste lunsj på en sushi-restaurant. De valgte hver sin meny, slik kvitteringene nedenfor viser.

Kunde 1		
Meny B	kr	88,-
2 biter laks		
1 bit scampi		
2 biter tunfisk		
Mineralvann	kr	30,-
Sum	kr	118,-
Velkommen igjen!		

Kunde 2		
Meny A	kr	101,-
3 biter laks		
2 biter scampi		
1 bit tunfisk		
Mineralvann	kr	30,-
Sum	kr	131,-
Velkommen igjen!		

Kunde 3		
Meny C	kr	103,-
3 biter laks		
1 bit scampi		
2 biter tunfisk		
Mineralvann	kr	30,-
Sum	kr	133,-
Velkommen igjen!		

Hvor mye hadde én bit sushi med laks, én bit med scampi og én bit med tunfisk kostet dersom de hadde blitt bestilt hver for seg?

Jeg lar prisen for én bit med laks være x kroner, prisen for én bit med scampi være y kroner og prisen for én bit med tunfisk være z kroner. Vi får da følgende likningssystem som jeg løser.

$$\begin{bmatrix} i) & 2x+y+2z=88 \\ ii) & 3x+2y+z=101 \\ iii) & 3x+y+2z=103 \end{bmatrix}$$

Jeg løser likning $i)$ med hensyn på y og setter inn i $ii)$ og $iii)$

$$i) \quad y=88-2x-2z \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ii) & 3x+2(88-2x-2z)+z=101 \\ iii) & 3x+88-2x-2z+2z=103 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ii) & 3x+176-4x-4z+z=101 \\ iii) & x+88=103 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ii) & x+3z=75 \\ iii) & x=\underline{\underline{15}} \end{bmatrix}$$

Likning $iii)$ ga verdien for x. Jeg setter denne verdien inn i likning $ii)$ $15+3z=75 \Rightarrow z=\underline{\underline{20}}$

Jeg setter verdiene for x og z inn i likning $i)$ $y=88-2\cdot15-2\cdot20=88-30-40=\underline{\underline{18}}$

<u>Én bit med laks hadde kostet 15 kroner, én bit med scampi hadde kostet 18 kroner og én bit med tunfisk hadde kostet 20 kroner.</u>

Oppgave 15

a) Vis at polynomdivisjonen

$$\left(x^3+2x^2-21x+18\right):\left(x-1\right)$$

går opp, uten å gjennomføre divisjonen.

Jeg sjekker om $x=1$ er et nullpunkt i polynomet $x^3+2x^2-21x+18$

$1^3+2\cdot1^2-21\cdot1+18=1+2-21+18=21-21=0$

Det betyr at divisjonen går opp.

b) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^3+2x^2-21x+18}{x^2-1}$$

Jeg utfører polynomdivisjonen $\left(x^3+2x^2-21x+18\right):\left(x-1\right)$

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+2x^2-21x+18\right):\left(x-1\right)=x^2+3x-18 \\
\underline{-\left(x^3-x^2\right)} \\
\quad 3x^2-21x+18 \\
\quad \underline{-\left(3x^2-3x\right)} \\
\qquad -18x+18 \\
\qquad \underline{-\left(-18x+18\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Det betyr at $x^3+2x^2-21x+18=\left(x^2+3x-18\right)\left(x-1\right)$

Vi får at $\dfrac{x^3+2x^2-21x+18}{x^2-1}=\dfrac{\left(x^2+3x-18\right)\cancel{\left(x-1\right)}}{\left(x+1\right)\cancel{\left(x-1\right)}}=\underline{\underline{\dfrac{x^2+3x-18}{x+1}}}$

Uttrykket kan ikke forkortes mer, fordi $x=-1$ ikke er nullpunkt i polynomet $x^2+3x-18$.

c) Bestem tallene a og b slik at divisjonen nedenfor går opp

$\left(x^3+ax+b\right):\left(x^2+2x-3\right)$

Polynomet $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

(Du kan bruke nullpunktmetoden og faktorisere hvis du ikke ser dette direkte)

Det betyr at $x=-3$ og $x=1$ må være nullpunkter i polynomet x^3+ax+b for at divisjonen skal gå opp. Vi må altså ha at

$$\begin{cases}(-3)^3+a\cdot(-3)+b=0\\(1)^3+a\cdot(1)+b=0\end{cases} \qquad \begin{cases}-27-3a+b=0\\1+a+b=0\end{cases} \qquad \begin{cases}-27-3a-1-a=0\\b=-1-a\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4a=28\\b=-1-a\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-7\\b=-1-(-7)\end{cases} \qquad \begin{cases}a=\underline{\underline{-7}}\\b=\underline{\underline{6}}\end{cases}$$

Oppgave 16

Forklar hvordan vi kan avgjøre om brøken nedenfor kan forkortes, uten å utføre forkortningen.

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x-3}$$

Forkort brøken.

Hvis brøken kan forkortes, må nevneren være en faktor i telleren. Det betyr at telleren må bli lik null for $x=3$.

$3^3-2\cdot3^2-3\cdot3=27-18-9=0$. Jeg vet da at divisjonen «går opp»

Jeg dividerer teller med nevner

$$\begin{array}{l}\left(x^3-2x^2-3x\right):(x-3)=x^2+x\\ \underline{-\left(x^3-3x^2\right)}\\ \qquad x^2-3x\\ \qquad \underline{-\left(x^2-3x\right)}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

Brøken kan da forkortes

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x-3}=\frac{\left(x^2+x\right)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\underline{\underline{x^2+x}}$$

Oppgave 17

a) Vi har gitt funksjonen $f(x)=3x^3+6x^2-3x-6$

Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$

$$f(-1)=3\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-6=-3+6+3-6=\underline{0}$$

$\Rightarrow \quad f(x)$ er delelig med $(x+1)$

b) Løs likningen $f(x)=0$

Punkt 1 viser at $f(x)$ kan deles med $(x+1)$

$$\left(3x^3+6x^2-3x-6\right):(x+1)=\underline{3x^2+3x-6}$$

$$\underline{-\left(3x^3+3x^2\right)}$$

$$3x^2-3x-6$$

$$\underline{-\left(3x^2+3x\right)}$$

$$-6X-6$$

$$\underline{-(-6X-6)}$$

$$0$$

Dette betyr at $f(x)=\left(3x^2+3x-6\right)\cdot(x+1)$

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+3x-6=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-6)}}{2\cdot3} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-1}}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{6}$$

$$x=\frac{-3\pm9}{6}$$

$$x=\underline{\underline{1}} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 18

Vi har gitt funksjonen $P(x)=2x^3-6x^2-8x+24$

a) Vis at $P(3)=0$

$$P(3)=2\cdot 3^3-6\cdot 3^2-8\cdot 3+24$$
$$P(3)=2\cdot 27-6\cdot 9-8\cdot 3+24$$
$$P(3)=54-54-24+24=\underline{\underline{0}}$$

b) Bruk polynomdivisjon til å faktorisere P i førstegradsfaktorer.

$P(3)=0$ viser at $(x-3)$ er faktor i polynomet.

$$\begin{array}{l} (2x^3-6x^2-8x+24):(x-3)=2x^2-8 \\ \underline{-(2x^3-6x^2)} \\ \qquad\qquad -8x+24 \\ \qquad\qquad \underline{-(8x+24)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Dette medfører at

$$P(x)=2x^3-6x^2-8x+24$$
$$P(x)=(x-3)(2x^2-8)$$
$$P(x)=(x-3)\cdot 2(x^2-4)$$
$$P(x)=\underline{\underline{2(x-3)(x-2)(x+2)}}$$

c) Forkort brøken $\dfrac{2x^3-6x^2-8x+24}{2x^2-8}$

Vi kan bruke resultatene fra oppgaven ovenfor

$$\frac{2x^3-6x^2-8x+24}{2x^2-8}$$
$$\frac{(x-3)\cancel{(2x^2-8)}}{\cancel{(2x^2-8)}}=\underline{\underline{x-3}}$$

Oppgave 19

Formelen for overflaten av en kule er $O = 4\pi r^2$.
Vi øker radien r med 10 %.

Hvor mange prosent øker overflaten til kulen da?

Vekstfaktoren for radien er 1,1 som gir ny radius $1{,}1 \cdot r$.
Det gir ny overflate lik $4\pi(1{,}1r)^2 = 4\pi \cdot 1{,}1^2 \cdot r^2 = 1{,}21 \cdot 4\pi r^2$
Dette viser at overflaten har økt med 21 %.

Oppgave 20 (HØST 2015)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x - 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$x + 2y - z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = x + 2y - 2$$

Det gir

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + x + 2y - 2 &= 3 \\ 3x - 2y + 2(x + 2y - 2) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 5x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x \quad \Rightarrow \quad 5x + 2(5 - 3x) = 6 \Rightarrow x = \underline{\underline{4}}$$

$$y = 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = \underline{\underline{-7}} \qquad z = x + 2y - 2 = 4 + 2 \cdot (-7) - 2 = \underline{\underline{-12}}$$

Oppgave 21

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2x+y+3z=10 \\ x+y+z=6 \\ x+3y+2z=13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+y+3z=10 \\ x+y+z=6 \\ x+3y+2z=13 \end{bmatrix}$$

$$z=6-x-y$$

$$\begin{bmatrix} 2x+y+3(6-x-y)=10 \\ x+3y+2(6-x-y)=13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x-2y+8=0 \\ -x+y-1=0 \end{bmatrix}$$

$$x=y-1$$

$$-(y-1)-2y+8=0$$

$$-3y+9=0$$

$$y=\underline{\underline{3}} \qquad x=3-1=\underline{\underline{2}} \qquad z=6-x-y=6-2-3=\underline{\underline{1}}$$

Oppgave 22

Vi har gitt polynomfunksjonen

$$f(x)=x^3+ax+12$$

a) Bestem a slik at divisjonen $f(x):(x+4)$ går opp.

Divisjonen går opp hvis $x=-4$ er et nullpunkt for f .

$$(-4)^3+a\cdot(-4)+12=0 \quad \Rightarrow \qquad a=\frac{64-12}{-4}=\underline{\underline{-13}}$$

b) Utfør divisjonen, og skriv $f(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer for denne a -verdien.

$$
\begin{array}{l}
x^3-13x+12:(x+4)=\underline{x^2-4x+3} \\
\underline{-(x^3+4x^2)} \\
\quad -4x^2-13x+12 \\
\underline{-(-4x^2-16x)} \\
\qquad\quad 3x+12 \\
\qquad \underline{-(3x+12)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Jeg faktoriserer andregradsuttrykket ved å bruke nullpunktmetoden

$x^2-4x+3=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{4\pm2}{2}$$

$$x=\underline{3} \quad \vee \quad x=\underline{1}$$

Dette viser at $f(x)=\underline{\underline{(x-1)(x-3)(x+4)}}$

Oppgave 23

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3+6x^2+9x+4 \quad , \qquad D_f=\mathbb{R} \ .$$

Vis at $x=-1$ er et nullpunkt til f. Bestem eventuelt andre nullpunkter.

Siden $f(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+4=-1+6-9+4=5-5=0$, er $x=-1$ et nullpunkt til f.

Jeg foretar polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+6x^2+9x+4\right):\left(x+1\right)=x^2+5x+4 \\
\underline{-\left(x^3+x^2\right)} \\
\quad 5x^2+9x+4 \\
\quad \underline{-\left(5x^2+5x\right)} \\
\qquad 4x+4 \\
\qquad \underline{-\left(4x+4\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Jeg setter så $x^2+5x+4=0$. Det gir to andre nullpunkter

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm3}{2}$$

$$\underline{\underline{x=-1}} \quad \vee \qquad \underline{\underline{x=-4}}$$

Oppgave 24

Funksjonen P er gitt ved $P(x) = 2x^3 - 26x + 24$

a) Forklar hvordan vi kan avgjøre om divisjonen $P(x):(x-1)$ vil gå opp, uten å utføre divisjonen.

Hvis $x = a$, $x = b$ og $x = c$ er nullpunkter til polynomet $P(x)$, så kan $P(x)$ faktoriseres til $P(x) = 2(x-a)(x-b)(x-c)$. Da vil divisjonene $P(x):(x-a)$, $P(x):(x-b)$ og $P(x):(x-c)$ gå opp. Vi kan altså undersøke om $P(x) = 0$ for $x = 1$. Hvis det er tilfelle, går divisjonen $P(x):(x-1)$ opp.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer (førstegradsfaktorer).

Jeg undersøker om $P(x) = 0$ for $x = 1$.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 26 \cdot 1 + 24 = 2 - 26 + 24 = 26 - 26 = \underline{0}$

Jeg utfører divisjonen $P(x):(x-1)$

$$
\begin{array}{l}
2x^3 - 26x + 24 : (x-1) = 2x^2 + 2x - 24 \\
\underline{-(2x^3 - 2x^2)} \\
\quad 2x^2 - 26x + 24 \\
\quad \underline{-(2x^2 - 2x)} \\
\qquad -24x + 24 \\
\qquad \underline{-(-24x + 24)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Jeg løser likningen

$2x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 14}{2 \cdot 2}$$

$$x = \underline{3} \vee x = \underline{-4}$$

Det betyr at $\underline{\underline{P(x) = 2(x-1)(x-3)(x+4)}}$

Oppgave 25

Lise investerte 10 000 kroner i et aksjefond. Fondet brukte disse pengene til å kjøpe aksjer i selskapene A, B og C. Etter ett år var utbyttet av aksjene til sammen 900 kroner. Utbyttet fra selskap A, B og C var på henholdsvis 9 %, 1 % og 10 %. Fondet hadde brukt 4 000 kroner mer på investeringene i selskap A enn i selskap B.

a) Vis at opplysningene gir følgende likningssystem:

$$\begin{bmatrix} x+y+z=10000 \\ 9x+y+10z=90000 \\ x-y=4000 \end{bmatrix}$$

Hvilke størrelser står x, y og z for?

Jeg lar x være aksjeposten (investeringen) i selskap A, y aksjeposten i selskap B og z aksjeposten i selskap C.

Siden samlet aksjepost var lik 10 000 kroner, får jeg likningen $x+y+z=10000$

Utbytteopplysningene sier at samlet utbytte er $\frac{x\cdot 9}{100}+\frac{y\cdot 1}{100}+\frac{z\cdot 10}{100}=900$

Når jeg multipliserer med 100 på begge sider i likningen, får jeg likningen $9x+y+10z=90000$.

Fondet hadde brukt 4000 kroner mer i selskap A enn i selskap B. Det gir likningen $x-y=4000$

b) Hvor mye av Lises penger investerte fondet i hvert av de tre selskapene?

Jeg løser likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x+y+z=10\,000 \\ 9x+y+10z=90\,000 \\ x-y=4\,000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+x-4\,000+z=10\,000 \\ 9x+x-4\,000+10z=90\,000 \\ y=x-4\,000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+z=14\,000 \\ 10x+10z=94\,000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z=14\,000-2x \\ 10x+10z=94\,000 \end{bmatrix}$$

$$10x+10\left(14\,000-2x\right)=94\,000$$
$$10x-20x=94\,000-140\,000$$
$$x=\underline{\underline{4\,600}} \Rightarrow z=14\,000-2\cdot 4\,600=\underline{\underline{4\,800}} \Rightarrow y=x-4\,000=4\,600-4000=\underline{\underline{600}}$$

<u>Fondet investerte 4 600 kroner i selskap A, 600 kroner i selskap B og 4 800 kroner i selskap C.</u>

Oppgave 26

a) Løs likningen $\frac{6}{x^2-3x}+\frac{x-2}{x}=\frac{2}{x-3}$

$$\frac{6}{x(x-3)}+\frac{x-2}{x}=\frac{2}{x-3}$$

Må ha $x \neq 0$ og $x \neq 3$

$$\frac{6}{\cancel{x(x-3)}}\cdot \cancel{x(x-3)}+\frac{x-2}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}(x-3)=\frac{2}{\cancel{x-3}}\cdot x\,\cancel{(x-3)}$$

$$6+(x-2)(x-3)=2x$$

$$6+x^2-3x-2x+6=2x$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}$$

$$x_1=\underline{\underline{4}} \qquad \cancel{x_2=3}$$

Løsningen $x=3$ gir null i nevner og kan ikke brukes.

b)

1) Vis at $x=-1$ er et nullpunkt til funksjonen $f(x)=2x^3-10x^2+6x+18$

$$f(x)=2x^3-10x^2+6x+18$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)^3-10\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+18$$

$$f(-1)=-2-10-6+18$$

$$f(-1)=0$$

Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$

$$f(x)=2x^3-10x^2+6x+18$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3-10x^2+6x+18):(x+1)=2x^2-12x+18 \\
\underline{-(2x^3+2x^2)} \\
\quad -12x^2+6x+18 \\
\quad \underline{-(-12x^2-12x)} \\
\qquad\qquad 18x+18 \\
\qquad\qquad \underline{-(18x+18)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$(2x^3 - 10x^2 + 6x + 18) = (x+1)(2x^2 - 12x + 18)$

Setter andregradspolynomet lik null

$2x^2 - 12x + 18 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{4}$$

$$x = \frac{12}{4} = 3$$

Dette betyr at $f(x) = (2x^3 - 10x^2 + 6x + 18) = (x+1)(2x^2 - 12x + 18) = \underline{\underline{2(x+1)(x-3)^2}}$

2. Løs ulikheten $f(x) \geq 0$

I forrige delspørsmål fant vi det faktoriserte uttrykket for $f(x)$. Det betyr at $f(x) \geq 0$ hvis og bare hvis $2(x+1)(x-3)^2 \geq 0$. Uttrykket $(x-3)^2$ er alltid lik eller større enn null. Det betyr igjen at $f(x) \geq 0$ hvis og bare hvis $(x+1) \geq 0$, og det er når $x \geq \underline{\underline{-1}}$

Oppgave 27

Løs likningssettet

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 4x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Løser likningen $x + y - z = 0$ med hensyn på x

$x = z - y$

Så settes dette uttrykket inn for x i de to andre likningene.

$$\begin{aligned} 2(z - y) + y - z &= 2 \\ 4(z - y) + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z - 2y + y - z &= 2 \\ 4z - 4y + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - y &= 2 \\ 2z - 3y &= 1 \end{aligned}$$

Vi har nå et likningssett med to ukjente som vi løser.

$$z - y = 2$$
$$y = z - 2$$

videre er

$$2z - 3(z - 2) = 1$$
$$2z - 3z + 6 = 1$$
$$-z = -5$$
$$z = 5$$

som gir

$$y = 5 - 2 = 3$$
$$x = 5 - 3 = 2$$

Vi har dermed løsningen $x = \underline{\underline{2}}$, $y = \underline{\underline{3}}$ og $z = \underline{\underline{5}}$

Oppgave 28 (3 poeng) (VÅR 2016)

Mathias har handlet litt mye på et kond

itori i det siste. Dessverre har han vært uheldig og fått revet av deler av kvitteringene, slik at han ikke lenger vet hvor mye de enkelte bakervarene koster. Se bildet nedenfor.

Bruk opplysningene på kvitteringene til å sette opp et likningssystem, og bruk dette til å bestemme prisen på skoleboller, boller og muffins.

Jeg lar x være prisen på skoleboller, y prisen på boller og z prisen på muffins.
Opplysningene på kvitteringene gir oss følgende likningssystem

$$4x + 4y + 2z = 176$$
$$2x + 4y + 2z = 142$$
$$3x + 5y + 4z = 222$$

Vi løser likningssystemet. Vi trekker venstre side i likning 2 fra venstre side i likning 1, og tilsvarende med høyresidene

$$4x+4y+2z-(2x+4y+2z)=176-142 \;\Rightarrow\; 2x=34 \;\Rightarrow\; x=\underline{17}$$

$$2\cdot 17+4y+2z=142 \;\Rightarrow\; 4y+2z=108 \;\Rightarrow\; z=54-2y$$
$$3\cdot 17+5y+4z=222 \;\Rightarrow\; 5y+4z=171$$
$$\Rightarrow\; 5y+4(54-2y)=171$$
$$\Rightarrow\; 5y-8y=171-216$$
$$\Rightarrow\; 3y=45$$
$$\Rightarrow\; y=\underline{15} \qquad \Rightarrow\; z=54-2\cdot 15=\underline{24}$$

<u>Prisen på skoleboller er 17 kroner, på boller 15 kroner og på muffins 24 kroner.</u>

Oppgave 29 (8 poeng) (VÅR 2016)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x)=x^3-6x^2+32$$

a) Vis at $P(x)$ er delelig med $(x+2)$. Bestem nullpunktene til P.

Jeg setter inn $x=-2$ i funksjonsuttrykket.

$$P(-2)=(-2)^3-6\cdot(-2)^2+32=-8-6\cdot 4+32=0$$

Dette betyr at divisjonene går opp!
Vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
(x^3-6x^2+32):(x+2)=x^2-8x+16 \\
\underline{-(x^3+2x^2)} \\
\qquad -8x^2+32 \\
\qquad \underline{-(-8x^2-16x)} \\
\qquad\qquad 16x+32 \\
\qquad\qquad \underline{-(16x+32)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi finner så nullpunktene til $x^2-8x+16$

$$x^2-8x+16=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{8\pm 0}{2}$$
$$x=4$$

Vi får at $P(x)=(x+2)\cdot(x-4)\cdot(x-4)$.

Nullpunktene til P er $x = \underline{\underline{-2}}$ og $x = \underline{\underline{4}}$.

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til P.

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 32 \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 3x^2 - 12x \quad \Rightarrow \quad P''(x) = 6x - 12$

I eventuelle topp- og bunnpunkt er den deriverte lik null.

$$P'(x) = 0$$
$$3x^2 - 12x = 0$$
$$3x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Jeg tar dobbeltderiverttesten.

$P''(x) = 6x - 12$

$P''(0) = 6 \cdot 0 - 12 = -12$ negativt

$P''(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 12$ positivt

Grafen har toppunkt i $(0, f(0)) = (0, 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 32) = \underline{\underline{(0, 32)}}$.

Grafen har bunnpunkt i $(4, f(4)) = \underline{\underline{(4, 0)}}$.

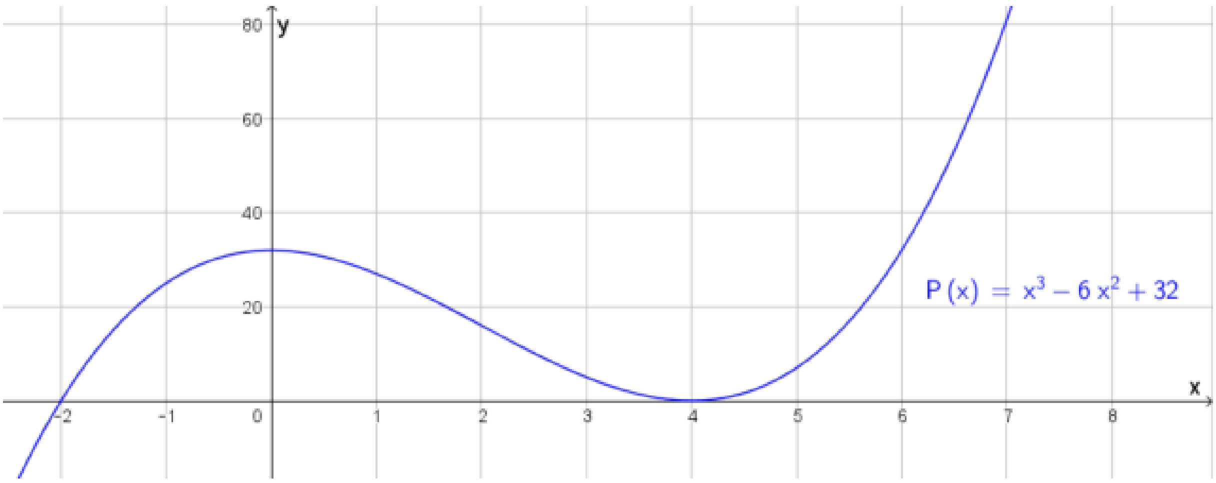
c) Bestem det eventuelle vendepunktet på grafen til P.

Vi løser likningen $P''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0$$
$$x = 2$$

Vi har et vendepunkt med koordinater $(2, f(2)) = (2, 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 32) = \underline{\underline{(2, 16)}}$.

d) Lag en skisse av grafen til P



Oppgave 30 (4 poeng) (HØST 2016)

Løs likningene

a) $\dfrac{3x}{x-2}=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

$$\frac{3x(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\frac{x^2(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)(x-2)}}$$

$$3x^2+6x=x^2$$

$$2x(x+3)=0$$

$$x=\underline{\underline{0}} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-3}}$$

b) $\ln(x^2+2x-14)=0$

$$x^2+2x-14=1$$

$$x^2+2x-15=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-15)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$x=\underline{\underline{3}} \quad \vee \quad x=\underline{\underline{-5}}$$

Oppgave 31 (4 poeng) (HØST 2016)

En bedrift produserer en vare. De totale kostnadene K ved produksjon av x enheter kan skrives på formen

$$K(x)=ax^2+bx+c$$

Vi får vite at

- kostnadene er 3000 når det produseres 10 enheter
- kostnadene er 8000 når det produseres 20 enheter
- grensekostnadene ved produksjon av 10 enheter er 350

a) Forklar at dette gir oss likningssystemet

$$100a+10b+c=3000$$
$$400a+20b+c=8000$$
$$20a+b=350$$

$$K(10)=3000 \Rightarrow a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=3000 \Rightarrow 100a+10b+c=3000$$
$$K(20)=8000 \Rightarrow a\cdot 20^2+b\cdot 20+c=8000 \Rightarrow 400a+20b+c=8000$$
$$K'(10)=350 \Rightarrow 2a\cdot 10+b=350 \Rightarrow 20a+b=350$$

Løs likningssystemet.

$$100a+10b+c=3000 \quad \Rightarrow \quad c=3000-100a-10b$$

Det gir

$$\begin{aligned} 400a+20b+3000-100a-10b&=8000 \\ 300a+10b&=5000 \\ 30a+b&=500 \\ b&=500-30a \end{aligned}$$

$$20a+b=350 \Rightarrow 20a+500-30a=350 \Rightarrow -10a=-150$$
$$\Rightarrow a=\underline{\underline{15}}$$
$$b=500-30\cdot 15=\underline{\underline{50}}$$
$$c=3000-100\cdot 15-10\cdot 50=\underline{\underline{1000}}$$

Oppgave 32 (2 poeng) (VÅR 2017)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x+y-z&=2 \\ 4x+y-2z&=1 \end{aligned}$$

$$x+y-z=0 \quad \Rightarrow \quad z=x+y$$

Det gir

$$\begin{aligned} 2x+y-(x+y)&=2 \\ x&=\underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot 2+y-2(2+y)&=1 \\ 8+y-4-2y&=1 \\ y&=\underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z&=2+3 \\ z&=\underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Oppgave 33 (7 poeng) (VÅR 2017)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3+4x^2+x-6$$

a) Vi ser at $f(1)=0$. Bruk blant annet polynomdivisjon til å vise at

$$f(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$$

Siden $f(1)=0$, må $(x-1)$ være en faktor.

Vi utfører polynomdivisjonen

$$
\begin{aligned}
&(x^3+4x^2+x-6):(x-1)=x^2+5x+6\\
&\underline{-(x^3-x^2)}\\
&\qquad 5x^2+x-6\\
&\quad \underline{-(5x^2-5x)}\\
&\qquad\qquad 6x-6\\
&\qquad\qquad \underline{-(6x-6)}\\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Vi finner så nullpunktene til x^2+5x+6

$$x^2+5x+6=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-5\pm1}{2}$$

$$x=-2 \quad \vee \quad x=-3$$

Vi får at $f(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$ q.e.d.

b) Løs ulikheten $f(x)\le 0$.

$$f(x)\le 0$$

$$x^3+4x^2+x-6\le 0$$

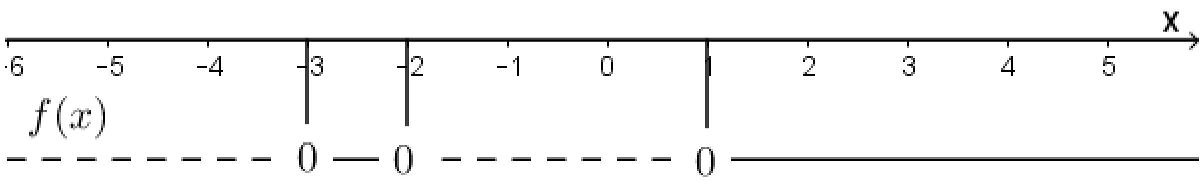
$$(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\le 0$$

$f(-4)=(-4-1)(-4+2)(-4+3)$ negativt

$f(-2{,}5)=(-2{,}5-1)(-2{,}5+2)(-2{,}5+3)$ positivt

$f(0)=(0-1)(0+2)(0+3)$ negativt

$f(2)=(2-1)(2+2)(2+3)$ positivt



$$L = \underline{\underline{\langle \leftarrow, -3] \cup [-2, 1]}}$$

c) Forkort brøken mest mulig

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x^2 - 2}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x^2 - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)(x+3)}{2\cancel{(x-1)}(x+1)} = \underline{\underline{\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+1)}}}$$

d) Bruk blant annet det du viste i oppgave a), til å løse likningen

$$e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

$$e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

$$(e^x)^3 + 4(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$$

$$y^3 + 4y^2 + y - 6 = 0 \qquad \text{Bytter ut } e^x \text{ med y}$$

$$(y-1)(y+2)(y+3) = 0 \qquad \text{Fra oppgave a)}$$

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -2 \quad \vee \quad y = -3$$

$$e^x = 1 \quad \vee \quad = -2 \quad \vee \quad e^x = -3$$

$$x = \underline{\underline{0}} \qquad e^x \text{ kan ikke være negativ.}$$

Oppgave 34 (4 poeng) (HØST 2017)

a) Utfør divisjonen

$$(x^3 - 5x^2 - 4x + 20) : (x - 5)$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 - 4x + 20) : (x - 5) = \underline{\underline{x^2 - 4}} \\
\underline{-(x^3 - 5x^2)} \\
\qquad -4x + 20 \\
\qquad \underline{-(-4x + 20)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) Bestem t slik at divisjonen nedenfor går opp.

$$(x^3 + tx^2 + 5x - 2t) : (x + 1)$$

For at divisjonen skal gå opp:

$$\begin{aligned}(-1)^3+t\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)-2t&=0\\ -1+t-5-2t&=0\\ -t&=6\\ t&=\underline{\underline{-6}}\end{aligned}$$

Oppgave 35 (2 poeng) (HØST 2017)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned}x+y+2z&=-3\\ x+3y+z&=2\\ 2x+y+z&=2\end{aligned}$$

$x+y+2z=-3 \quad\Rightarrow\quad x=-y-2z-3$

Det gir

$$\begin{aligned}-y-2z-3+3y+z&=2\\ 2y-z&=5\\ z&=2y-5\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}2\cdot(-y-2z-3)+y+z&=2\\ -y-3z&=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-y-3(2y-5)&=8\\ -7y&=-7\\ y&=\underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-1-3z&=8\\ -3z&=9\\ z&=\underline{\underline{-3}}\end{aligned}$$

$$x=-1-2\cdot(-3)-3=\underline{\underline{2}}$$

Oppgave 36 (2 poeng) (HØST 2017)

Skriv så enkelt som mulig:

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)+2\ln 2-\ln\left(\frac{2}{e^4}\right)$$

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)+2\ln 2-\ln\left(\frac{2}{e^4}\right)=2\ln e-\ln 2+2\ln 2-\ln 2+4\ln e=6\ln e=\underline{\underline{6}}$$

Oppgave 37 (2 poeng) (VÅR 2018)

Løs ligningssystemet

1. $5x+y+2z=0$
2. $2x+3y+z=3$
3. $3x+2y-z=-3$

Flere av løsningsforslagene er hentet fra eksamensløsningene på ndla.no

Vi adderer likning 2 og 3

$$2x+3x+3y+2y+z+(-z)=3+(-3)$$
$$5x+5y=0$$
$$x=\frac{-5}{5}y$$
$$x=-y$$

Vi adderer likning 1 med to ganger likning 3

$$5x+6x+y+4y+2z+(-2z)=0+(-6)$$
$$11x+5y=-6$$

Fra tidligere har vi at $x=-y$. Vi setter inn for x og får

$$11(-y)+5y=-6$$
$$-11y+5y=-6$$
$$-6y=-6$$
$$y=1$$

Det gir at $x=-1$

Vi setter så verdiene for x og y inn i likning 3

$$3x+2y-z=-3$$
$$3+(-2)-z=-3$$
$$3-3+2=z$$
$$z=2$$

Likningssystemet har løsningen $x=-1 \quad \wedge \quad y=1 \quad \wedge \quad z=2$

Oppgave 38 (4 poeng) (VÅR 2018)

Et polynom P er gitt ved

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15$$

a) Forklar at $P(x)$ er delelig med $(x-1)$.

Polynomet P er delelig med $(x-1)$ dersom $x=1$ er et nullpunkt for P.

$$P(1)=1^3-3\cdot 1^2-13\cdot 1+15=0$$

Dette gir dermed at $(x-1)$ er en faktor i P.

b) Løs ulikheten $P(x)>0$.

Vi utfører polynomdivisjonen

$$
\begin{aligned}
&\left(x^3-3x^2-13x+15\right):\left(x-1\right)=x^2-2x-15\\
&\underline{-\left(x^3-x^2\right)}\\
&\qquad -2x^2-13x\\
&\qquad \underline{-\left(-2x+2x\right)}\\
&\qquad\qquad -15x+15\\
&\qquad\qquad \underline{-\left(15x+15\right)}\\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

Det betyr at $P(x)=\left(x^2-2x-15\right)\left(x-1\right)$

Vi kan nå faktorisere andregradspolynomet ved hjelp nullpunktmetoden.

$$x^2-2x-15=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-15)}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm8}{2}$$

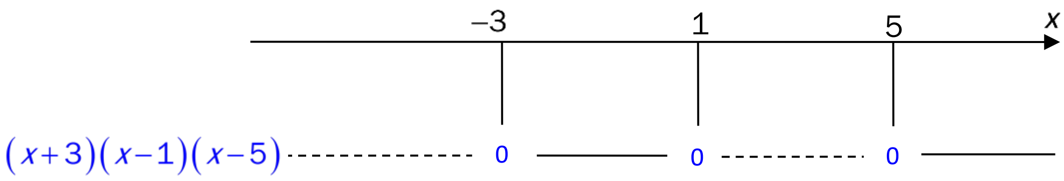
$$x_1=-3 \quad \vee \quad x_2=5$$

Det betyr at $x^2-2x-15=\left(x+3\right)\left(x-5\right)$.

Fullstendig faktorisering av tredjegradsuttrykket gir

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15=\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-5\right)$$

Vi tegner fortegnsskjema



Vi finner at $P(x)>0$ for $-3<x<1 \quad \vee \quad x>5$

DEL 2

Oppgave 1

Energiinnholdet i de tre produktene smøreost, helmelk og hvitost kommer fra næringsstoffene fett, karbohydrater og proteiner.

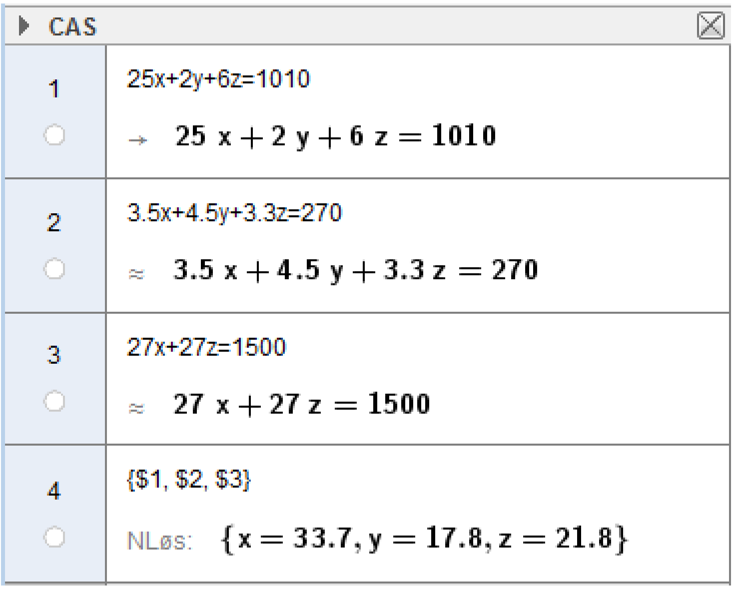
Tabellen nedenfor viser næringsinnhold og samlet energiinnhold i 100 g av hvert av de tre produktene.

	Smøreost	Helmelk	Hvitost
Fett	25 g	3,5 g	27 g
Karbohydrater	2 g	4,5 g	0 g
Proteiner	6 g	3,3 g	27 g
Energiinnhold	1010 kJ	270 kJ	1500 kJ

Sett opp et likningssystem og bruk CAS til å bestemme energiinnholdet (i kJ) i 1 g fett, 1 g karbohydrater og 1 g proteiner.

Jeg lar x være energiinnholdet i 1 g fett, y energiinnholdet i 1 g karbohydrater og z energiinnholdet i 1 g proteiner.

Ut fra tabellen kan jeg sette opp og løse følgende likningssett.



<u>I 1 g fett er det 33,3 kJ</u>

<u>I 1 g karbohydrater er det 17,8 kJ</u>

<u>I 1 g proteiner er det 21,8 kJ</u>

Oppgave 2 (6 poeng) (VÅR 2017)

En bedrift produserer en vare. Bedriften selger alt den produserer. Overskuddet O ved salg av x enheter per uke er gitt ved

$$O(x) = ax^2 + bx + c$$

- Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.
- Overskuddet er størst når bedriften selger 475 enheter.
- Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.

a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet

$$\begin{aligned} 40000a + 200b + c &= 0 \\ 950a + b &= 0 \\ 1200a + b &= -5 \end{aligned}$$

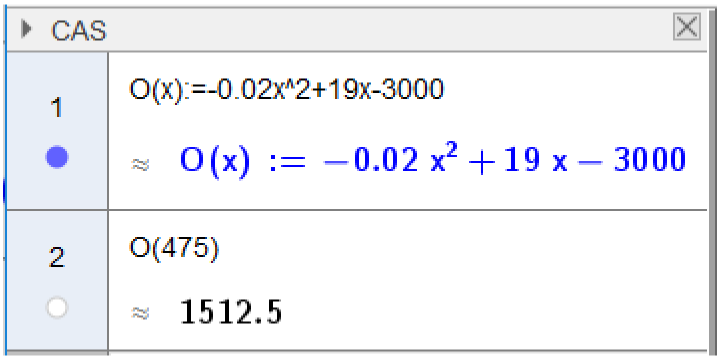
$$O(200) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{40000a + 200b + c = 0}$$
$$O'(475) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a \cdot 475 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{950a + b = 0}$$
$$O'(600) = I'(600) - K'(600) = -5 \quad \Rightarrow \quad 2a \cdot 600 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{1200a + b = -5}$$

b) Bruk CAS til å bestemme a, b og c.

CAS

1	40000a+200b+c=0 ≈ $40000\,a + 200\,b + c = 0$
2	950a+b=0 ≈ $950\,a + b = 0$
3	1200a+b=-5 ≈ $1200\,a + b = -5$
4	{$1, $2, $3} NLøs: $\{a = -0.02, b = 19, c = -3000\}$

Hva er det største overskuddet bedriften kan få per uke?
Størst overskudd når det selges 475 enheter per uke.


CAS
1
O(x):=-0.02x^2+19x-3000
≈ O(x) := −0.02 x² + 19 x − 3000
2
O(475)
≈ 1512.5