ALGEBRA

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x)=x^3+x^2-4x-4$

a) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+2)$

b) Løs likningen $f(x)=0$

Oppgave 2

Vi har gitt funksjonen $f(x)=3x^3+6x^2-3x-6$

1. Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$
2. Løs likningen $f(x)=0$

Oppgave 3

Tre venner handlet frukt. Kari kjøpte 2 kg epler, 3 kg pærer og 1 kg appelsiner. Hun betalte 81 kroner. Per kjøpte 1 kg epler, 2 kg pærer og 3 kg appelsiner. Han betalte 71 kroner. Lise kjøpte 1 kg av hver av fruktsortene. Hun måtte betale 37 kroner.

Sett opp et likningssett, og finn kiloprisen for epler, pærer og appelsiner.

Oppgave 4

Forkort brøken

$$\frac{x^3-3x^2-13x+15}{x+3}$$

Oppgave 5

a) Forkort brøken ved å bruke polynomdivisjon

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

b) Bestem tallet a slik at divisjonen går opp

$$(x^2-2x+a):(x-3)$$

c) Bestem tallet b slik at divisjonen går opp

$$(x^2-3x-4):(x-b)$$

Oppgave 6

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \quad , \quad D_P = \mathbb{R}$$

a) Bestem $P(2)$.

b) Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i lineære faktorer.

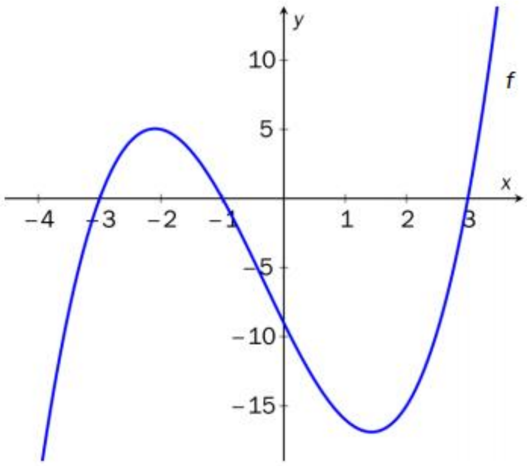
Oppgave 7

Løs likningen $2^{x^2-2x} = 8$

Oppgave 8

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f gitt ved

$$f(x) = x^3 + x^2 + kx + k, \quad D_f = \mathbb{R} \ .$$



a) Faktoriser $f(x)$ med lineære faktorer.

b) Bestem verdien for k ved regning.

Oppgave 9

a) Forklar at polynomet $x^3 - ax^2 + 2ax - 8$ alltid er delelig med $(x-2)$.

b) Forkort brøken

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x-2}$$

Oppgave 10

Tre gutter har tre ulike typer mynter med ulik verdi i lommene. Tabellen nedenfor viser fordelingen av myntene.

Regn ut verdien til de tre mynttypene ved å løse et likningssystem.

Navn	Antall mynt type 1	Antall mynt type 2	Antall mynt type 3	Sum i kr.
Ola	3	2	4	120
Per	2	3	2	75
Inge	2	5	3	105

Oppgave 11

En buss stoppet tre steder på en rute. På første holdeplass kom det på ti barn, fire voksne og tre pensjonister. Til sammen betalte disse 225 kroner. På neste stoppested kom det på åtte barn, tre voksne og to pensjonister. Disse betalte til sammen 170 kroner. På siste holdeplass kom det på ni barn, fire voksne og tre pensjonister. Disse betalte til sammen 215 kroner.

Sett opp og løs et likningssystem, og bestem billettprisen for barn, voksne og pensjonister.

Oppgave 12

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x+y-z=13 \\ 2x+y+z=27 \\ x-3y-2z=-9 \end{bmatrix}$$

Oppgave 13

Ved en konsert var billettprisen 100 kroner for voksne, 50 kroner for barn og 60 kroner for pensjonister. Det ble solgt 80 billetter til konserten. Billettinntektene var i alt 5 000 kroner. Det ble solgt like mange billetter til barn som til voksne og pensjonister til sammen.

Sett opp et likningssystem og bruk dette til å bestemme antall voksne, antall barn og antall pensjonister som kjøpte billett til konserten.

Oppgave 14

Tre venner spiste lunsj på en sushi-restaurant. De valgte hver sin meny, slik kvitteringene nedenfor viser.


goSushi
Kunde 1
Meny B kr 88,-
2 biter laks
1 bit scampi
2 biter tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 118,-
Velkommen igjen!

goSushi
Kunde 2
Meny A kr 101,-
3 biter laks
2 biter scampi
1 bit tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 131,-
Velkommen igjen!

goSushi
Kunde 3
Meny C kr 103,-
3 biter laks
1 bit scampi
2 biter tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 133,-
Velkommen igjen!

Hvor mye hadde én bit sushi med laks, én bit med scampi og én bit med tunfisk kostet dersom de hadde blitt bestilt hver for seg?

Oppgave 15

a) Vis at polynomdivisjonen

$$\left(x^3+2x^2-21x+18\right):\left(x-1\right)$$

går opp, uten å gjennomføre divisjonen.

b) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^3+2x^2-21x+18}{x^2-1}$$

c) Bestem tallene a og b slik at divisjonen nedenfor går opp

$$\left(x^3+ax+b\right):\left(x^2+2x-3\right)$$

Oppgave 16

Forklar hvordan vi kan avgjøre om brøken nedenfor kan forkortes, uten å utføre forkortningen.

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x-3}$$

Forkort brøken.

Oppgave 17

a) Vi har gitt funksjonen $f(x)=3x^3+6x^2-3x-6$

Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$

b) Løs likningen $f(x)=0$

Oppgave 18

Vi har gitt funksjonen $P(x)=2x^3-6x^2-8x+24$

a) Vis at $P(3)=0$

b) Bruk polynomdivisjon til å faktorisere P i førstegradsfaktorer.

c) Forkort brøken $\dfrac{2x^3-6x^2-8x+24}{2x^2-8}$

Oppgave 19

Formelen for overflaten av en kule er $O=4\pi r^2$.
Vi øker radien r med 10 %.

Hvor mange prosent øker overflaten til kulen da?

Oppgave 20

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ 2x-y+z&=3\\ 3x-2y+2z&=2 \end{aligned}$$

Oppgave 21

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2x+y+3z=10 \\ x+y+z=6 \\ x+3y+2z=13 \end{bmatrix}$$

Oppgave 22

Vi har gitt polynomfunksjonen

$$f\left(x\right)=x^3+ax+12$$

a) Bestem a slik at divisjonen $f\left(x\right):\left(x+4\right)$ går opp.

b) Utfør divisjonen, og skriv $f\left(x\right)$ som et produkt av førstegradsfaktorer for denne a -verdien.

Oppgave 23

Funksjonen f er gitt ved

$$f\left(x\right)=x^3+6x^2+9x+4 \quad , \qquad D_f=\mathbb{R} \ .$$

Vis at $x=-1$ er et nullpunkt til f . Bestem eventuelt andre nullpunkter.

Oppgave 24

Funksjonen P er gitt ved $P\left(x\right)=2x^3-26x+24$

a) Forklar hvordan vi kan avgjøre om divisjonen $P\left(x\right):\left(x-1\right)$ vil gå opp, uten å utføre divisjonen.

b) Faktoriser $P\left(x\right)$ i lineære faktorer (førstegradsfaktorer).

Oppgave 25

Lise investerte 10 000 kroner i et aksjefond. Fondet brukte disse pengene til å kjøpe aksjer i selskapene A, B og C. Etter ett år var utbyttet av aksjene til sammen 900 kroner. Utbyttet fra selskap A, B og C var på henholdsvis 9 %, 1 % og 10 %. Fondet hadde brukt 4 000 kroner mer på investeringene i selskap A enn i selskap B.

a) Vis at opplysningene gir følgende likningssystem:

$$\begin{bmatrix} x+y+\quad z=10000 \\ 9x+y+10z=90000 \\ x-y\qquad =4000 \end{bmatrix}$$

Hvilke størrelser står x, y og z for?

b) Hvor mye av Lises penger investerte fondet i hvert av de tre selskapene?

Oppgave 26

a) Løs likningen $\frac{6}{x^2-3x}+\frac{x-2}{x}=\frac{2}{x-3}$

b)

1. Vis at $x=-1$ er et nullpunkt til funksjonen $f(x)=2x^3-10x^2+6x+18$

   Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$

2. Løs ulikheten $f(x)\geq 0$

Oppgave 27

Løs likningssettet

$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x+y-z&=2 \\ 4x+y-2z&=1 \end{aligned}$$

Oppgave 28 (3 poeng) (VÅR 2016)

Mathias har handlet litt mye på et kond

itori i det siste. Dessverre har han vært uheldig og fått revet av deler av kvitteringene, slik at han ikke lenger vet hvor mye de enkelte bakervarene koster. Se bildet nedenfor.

Bruk opplysningene på kvitteringene til å sette opp et likningssystem, og bruk dette til å bestemme prisen på skoleboller, boller og muffins.

Oppgave 29 (8 poeng) (VÅR 2016)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

a) Vis at $P(x)$ er delelig med $(x+2)$. Bestem nullpunktene til P.

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til P.

c) Bestem det eventuelle vendepunktet på grafen til P.

c) Lag en skisse av grafen til P

Oppgave 30 (4 poeng) (HØST 2016)

Løs likningene

a) $\dfrac{3x}{x-2}=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

b) $\ln\left(x^2+2x-14\right)=0$

Oppgave 31 (4 poeng) (HØST 2016)

En bedrift produserer en vare. De totale kostnadene K ved produksjon av x enheter kan skrives på formen

$$K(x)=ax^2+bx+c$$

Vi får vite at

- kostnadene er 3000 når det produseres 10 enheter
- kostnadene er 8000 når det produseres 20 enheter
- grensekostnadene ved produksjon av 10 enheter er 350

a) Forklar at dette gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned}100a+10b+c&=3000\\400a+20b+c&=8000\\20a+b&=350\end{aligned}$$

b) Løs likningssystemet.

Oppgave 32 (2 poeng) (VÅR 2017)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned}x+y-z&=0\\2x+y-z&=2\\4x+y-2z&=1\end{aligned}$$

Oppgave 33 (7 poeng) (VÅR 2017)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

a) Vi ser at $f(1) = 0$. Bruk blant annet polynomdivisjon til å vise at

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$$

b) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$.

c) Forkort brøken mest mulig

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x^2 - 2}$$

d) Bruk blant annet det du viste i oppgave a), til å løse likningen

$$e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

Oppgave 34 (4 poeng) (HØST 2017)

a) Utfør divisjonen

$$\left(x^3 - 5x^2 - 4x + 20\right) : (x-5)$$

b) Bestem t slik at divisjonen nedenfor går opp.

$$\left(x^3 + tx^2 + 5x - 2t\right) : (x+1)$$

Oppgave 35 (2 poeng) (HØST 2017)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -3 \\ x + 3y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 36 (2 poeng) (HØST 2017)

Skriv så enkelt som mulig:

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)+2\ln 2-\ln\left(\frac{2}{e^4}\right)$$

Oppgave 37 (2 poeng) (VÅR 2018)
Løs ligningssystemet

1. $5x+y+2z=0$
2. $2x+3y+z=3$
3. $3x+2y-z=-3$

Oppgave 38 (4 poeng) (VÅR 2018)
Et polynom P er gitt ved

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15$$

a) Forklar at $P(x)$ er delelig med $(x-1)$.

b) Løs ulikheten $P(x)>0$.

DEL 2

Oppgave 1

Energiinnholdet i de tre produktene smøreost, helmelk og hvitost kommer fra næringsstoffene fett, karbohydrater og proteiner.

Tabellen nedenfor viser næringsinnhold og samlet energiinnhold i 100 g av hvert av de tre produktene.

	Smøreost	Helmelk	Hvitost
Fett	25 g	3,5 g	27 g
Karbohydrater	2 g	4,5 g	0 g
Proteiner	6 g	3,3 g	27 g
Energiinnhold	1010 kJ	270 kJ	1500 kJ

Sett opp et likningssystem og bruk CAS til å bestemme energiinnholdet (i kJ) i 1 g fett, 1 g karbohydrater og 1 g proteiner.

Oppgave 2 (6 poeng) (VÅR 2017)

En bedrift produserer en vare. Bedriften selger alt den produserer. Overskuddet O ved salg av x enheter per uke er gitt ved

$$O(x) = ax^2 + bx + c$$

- Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.
- Overskuddet er størst når bedriften selger 475 enheter.
- Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.

a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet

$$40000a + 200b + c = 0$$
$$950a + b = 0$$
$$1200a + b = -5$$

b) Bruk CAS til å bestemme a, b og c.

c) Hva er det største overskuddet bedriften kan få per uke?