Arbeidshefte

Eksamensoppgaver - S2

Rekker

Del 1 oppgaver

Oppgave 1

a) Bestem summen av den aritmetiske rekken $3 + 6 + ... + 300$

b) Bestem a_2 slik at rekken $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ blir aritmetisk når $a_1 = 4$ og $a_n = a_{n-2} + 8$, $n \geq 3$

Oppgave 2

a) Bestem et uttrykk for summen $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + ... + \frac{a}{2^{n-1}}$

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + ...$

b) Begrunn hvorfor rekken konvergerer.

c) Bestem a slik at summen av rekken blir 10.

Oppgave 3

I en aritmetisk rekke er $a_2 = 6$ og $a_5 = 18$

a) Skriv opp de fire første leddene i rekken.

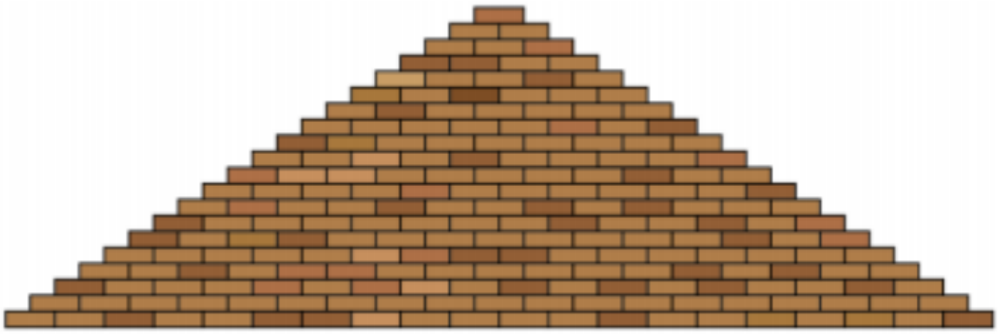
b) Bestem en formel for a_n

c) Bestem en formel for summen $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Oppgave 4

a) Forklar hva det vil si at en rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ er aritmetisk.

b) En murer skal lage en vegg slik figuren viser. Bruk teori om rekker til å bestemme hvor mange murstein mureren trenger, når han vet at det er totalt 20 rader med murstein.



Oppgave 5

Tallet $x = 0,555$ består av uendelig mange 5-tall etter komma.

a) Forklar at vi kan se på dette tallet som summen av den uendelige geometriske rekke

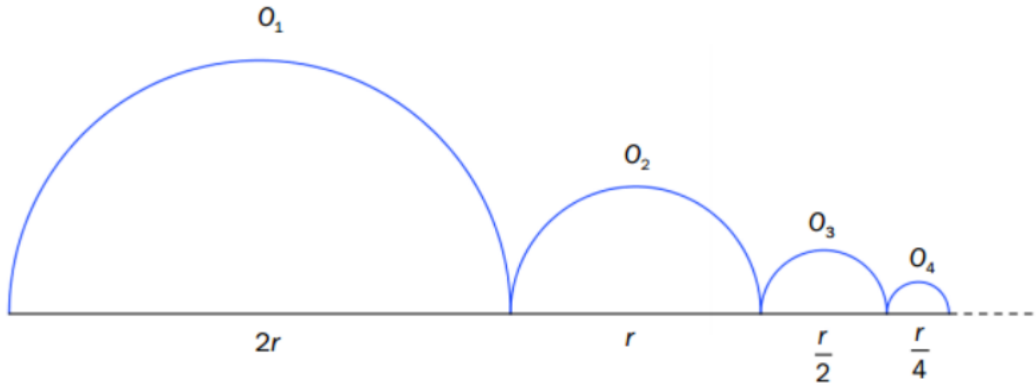
$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + ...$$

Bruk dette til å skrive x som en brøk.

b) Tallet $y = 0,232323$ kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk dette til å skrive y som en brøk.

Oppgave 6

Langs en linje har vi konstruert en rekke halvsirkler som vist på figuren nedenfor. Diameteren til den første halvsirkelen er $2r$. Videre er diameteren til den neste halvsirkelen halvparten av diameteren til den foregående. Vi lar O_n være lengden av halvsirkelbue nummer n.



a) Forklar at $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ blir en uendelig, geometrisk rekke.

b) Bestem summen av rekken i oppgave a). Kommenter svaret.

Oppgave 7

En type tablett inneholder 60 mg av et bestemt stoff. Når en pasient har dette stoffet i kroppen, vil mengden av stoffet bli halvert i løpet av 6 timer.

En pasient får én tablett hver tolvte time.
Hvor mange milligram av stoffet vil maksimalt samles i kroppen etter lang tids bruk?

Oppgave 8

En rekke er gitt ved $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen s_n av rekken.

b) Bestem summen av den uendelige rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Oppgave 9

a) Forklar hva vi mener med at en rekke er aritmetisk.

b) I en aritmetisk rekke er $a_1 = 3$ og $a_4 = 12$
Bestem a_n og s_n.

Oppgave 10

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved

a) Skriv opp de fire første leddene i tallfølgen.

b) Vis at leddene a_1, a_2, a_3 og a_4 er delelige med henholdsvis $2, 3, 4$ og 5.

c) Vis at a_n er delelig med $n + 1$

Oppgave 11

I en aritmetisk rekke er $a_2 = 6$ og $a_5 = 18$

a) Skriv opp de fire første leddene i rekken.

b) Bestem en formel for a_n.

c) Bestem en formel for summen $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Oppgave 12

Det n -te leddet i en geometrisk rekke er gitt ved

$$a_n = 11 \cdot (-0,1)^{n-1}$$

Forklar at rekken er konvergent. Hva blir summen?

Oppgave 13

Vi har gitt rekkene

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ...$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_{10}

b) $2 + 5 + 8 + ... + 89$ Bruk formler og bestem summen av rekken.

c) $1 + 2 + 4 + 8 + ...$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_8

d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$ Bestem summen av den uendelige rekken.

Oppgave 14

Tall som kan skrives på formen $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$, kalles for trekanttall. a) Skriv opp de fem første trekanttallene.

Vi organiserer oddetallene i en talltrekant slik tabellen nedenfor viser.

a_n	a_n	a_n	a_n	S_n	S_n
1	6		1		
2	3+5	8		9	3^2
3	7+9+11	27	3^3	36	
4	13+15+17+19		100		
5	21+23+25+27+29				15^2

b) Skriv av og fyll ut tabellen.
Bruk mønsteret som framkommer, til å finne en formel for a_n . c)
Bruk mønsteret til å forklare at vi kan skrive

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

Oppgave 15

a) Vi har gitt rekken

$$4 + 7 + 10 + 13 + ...$$

Bestem a_n og S_n

b) Løs likningen

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = 3 \ , \quad \text{når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Oppgave 16

I en aritmetisk tallfølge er $a_4 = 9$ og $a_{10} = 21$

Bestem $a_1 5$.

Oppgave 17

Trekanttallene er gitt ved formelen $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, der n er et naturlig tall.

a) Skriv opp de ti første trekanttallene.

Inge påstår at summen av to ≪nabo-trekanttall≫ alltid er lik et kvadrattall.

b) Finn ut om dette gjelder for $a_{14} + a_{15}$ og for $a_{20} + a_{21}$.

c) Finn ut om $a_n + a_{n+1}$ alltid er et kvadrattall.

Oppgave 18

En gummiball slippes fra en høyde på 10 m. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den rett opp $\frac{2}{3}$ av den forrige høyden.
Hva er den totale lengden ballen har tilbakelagt (ned og opp) fra den slippes, til den faller til ro?

Oppgave 19

Vi har rekken $1 + 3 + 5 + 7 + ...$

a) Hva slags rekke er dette? Bestem et uttrykk for det n-te leddet a_n.

b) Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene. Regn ut S_{100}.

Oppgave 20

Gitt den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$$

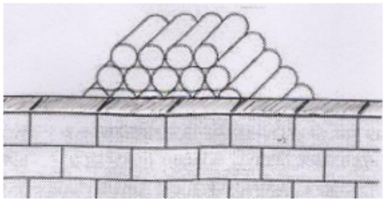
Avgjør om rekken konvergerer, og bestem eventuelt summen av rekken.

Oppgave 21

Forklar at den uendelige rekken nedenfor konvergerer. Bestem summen

$$7 + \frac{14}{9} + \frac{28}{91} + \frac{56}{729} + ...$$

Oppgave 22



En stabel med aluminiumsrør ligger delvis skjult bak en murvegg.

a) La antall rør i rad nummer n ovenfra være a_n. Ta utgangspunkt i tegningen og forklar at

$$a_n = n + 3 \quad \text{når } n \geq 1$$

b) Vis at antall rør til sammen i de n øverste radene er gitt ved

$$S_n = \frac{7n + n^2}{2}$$

c) Hvor mange rader trengs for å få plass til 225 rør?
(Du kan få bruk for at $\sqrt{1849} = 43$

Oppgave 23

a) Gitt rekka $2 + 4 + 6 + 8 + ...$
Finn ledd nummer 20 og summen av de 20 første leddene.

b) Gitt den uendelige rekka

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

Avgjør om rekka konvergerer. Finn eventuelt summen.

Oppgave 24

Vi har en aritmetisk rekke der $a_3 = 8$ og $a_8 = 23$. Bestem a_1, d og S_{50}

Oppgave 25

I en aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ er $a_1 = 3$ og $a_6 = 18$

a) Bestem differansen d, og bestem en formel for a_n uttrykt ved n.

b) Vis at summen av de n første leddene kan skrives som

$$S_n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

c) Hvor mange ledd må vi ha med for at summen skal bli 84?

Oppgave 26

En aritmetisk rekke er gitt ved $3 + 7 + 11 + 15 + ... + 119$

a) Bestem en formel for ledd nummer n i denne rekken.

b) Bestem summen av rekken.

Dette arbeidshefte :

Løsningsforslag :

17. januar 2024