Arbeidshefte

Eksamensoppgaver - S2

Rekker

Del 2 oppgaver

Oppgave 1

Kristin bestemmer seg for å spare penger til hun blir pensjonist. Hun ønsker å ha 2 millioner kroner på konto den dagen hun fyller 60 år. For å oppnå dette, vil hun sette inn et fast årlig beløp, første gang når hun fyller 25 år og siste gang når hun fyller 59 år. Hun regner med en årlig rente på 5 hele perioden.

a) Vis at hun må sette inn omtrent 21 000 kroner hvert år.

b) Den dagen Kristin fyller 60 år, vil hun ta ut 200 000 kroner. Det samme vil hun gjøre på hver av de fire neste fødselsdagene.
Hvor stort beløp har Kristin på kontoen den dagen hun fyller 65 år?

Oppgave 2

Katrine satte inn 20 000 kroner på konto hvert år, første gang 1. januar 2007 og siste gang 1. januar 2010. Innskuddsrenten var hele tiden 3,5 % per år. Alle innskuddene sto urørt.

a) Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen i banken 31. desember 2010?

b) 1. januar 2011 ble innskuddsrenten satt ned til 3,0 % per år. Katrine satte ikke flere penger i banken, men tok i stedet ut 8 000 kroner hvert år, første gang 1.januar 2011 og siste gang 1. januar 2014.
Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen 31. desember 2014?

Oppgave 3

Frida ønsker å kjøpe en ny PC som koster 7 995 kroner. Butikken tilbyr henne å kjøpe PC-en på avbetaling. Hun må da betale 36 like store månedlige beløp. Det første skal hun betale om én måned. Den månedlige renten er 1,6 %. I tillegg må hun betale et engangsgebyr på 30 kroner.

a) Forklar at dersom terminbeløpet er x kroner, så vil

$$\frac{x}{1,016} + \frac{x}{1,016^2} + ... + \frac{x}{1,01636} = 8025$$

Løs denne likningen.

Frida vurderer å låne pengene i banken i stedet. Der må hun betale 289 kroner hver måned i 36 måneder. Hun må betale første beløp én måned etter at hun har tatt opp lånet.

b) Hvilken månedlig rente (i prosent) får hun i banken?

Venninnen Elise har spart 650 kroner hver måned til en slik PC. Sparekontoen har en fast månedlig rente. I dag, like etter den 12. innbetalingen, har hun 8 107 kroner på kontoen.

c) Bestem den månedlige renten (i prosent) Elise fikk i banken.

Oppgave 4

Svanhild vurderer å ta opp et annuitetslån på 600 000 kroner. Hun kan velge mellom en fast årlig rente på 3,5 % og flytende rente. Lånet har én termin per år med en nedbetalingstid på 20 år. Første innbetaling skjer om ett år.

a) Forklar hvorfor vi kan bestemme terminbeløpet ved en fast årlig rente på 3,5 % ved å løse følgende likning

$$\frac{1}{1,035}(1+\frac{1}{1,035}+\frac{1}{1,035^2}+...+\frac{1}{1,035^{19}}) = 600\ 000$$

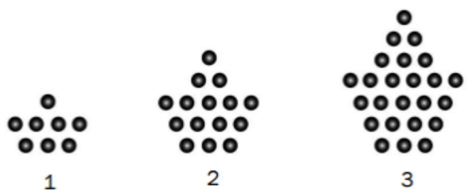
Bestem terminbeløpet ved å løse denne likningen.

b) Svanhild vurderer å be banken om å endre lånebetingelsene. Hva er den høyeste renten Svanhild kan ha dersom hun maksimalt kan betale 50 000 kroner i terminbeløp med 20 års nedbetalingstid?

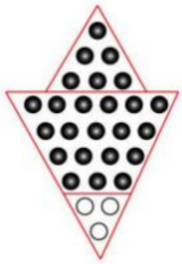
c) Bankens rådgiver mener at Svanhild må kunne betale en fast årlig rente på 6,5 %. For at Svanhild skal klare en slik rente, må hun øke antall terminer. Lånet har fremdeles én termin per år. Hvor mange terminer må Svanhild betale dersom terminbeløpet skal være mindre enn 50 000 kroner med en fast årlig rente på 6,5 %?

Oppgave 5

Båttallene B_n er antall prikker i figurene under. Vi ser at $B_1 = 8$ og $B_2 = 15$



a) Bestem B_4. Mathias ser at han kan dele hver figur i to biter slik at han får en trekant og en del av en større trekant. Ut fra dette ser han at $B_n = T_n + T_{n+3} - 3$, der $T_n = 1+2+3+...+n$.



b) Bruk dette til å bestemme B_5

c) Bestem en formel for B_n uttrykt ved n .

Oppgave 6

Et fond på 50 millioner kroner ble opprettet 1. januar 2015. Hensikten er å dele ut et fast beløp til gode formål den 31.12. hvert år. Styret for fondet gikk først ut fra at den årlige avkastningen ville bli 10,0 %.

a) Hvor mye penger kan maksimalt deles ut hvert år dersom fondet aldri skal gå tomt?

b) Når vil fondet være tomt for penger dersom det deles ut 8 millioner kroner hvert år?

Oppgave 7

I starten av et år vurderer Lise å låne 100 000 kroner for å investere i et aksjefond. Lånet er et annuitetslån, og hun må betale 16 274,54 kroner i slutten av hvert år i 10 år for å nedbetale hele lånet, første gang ett år etter låneopptaket.

a) Vis at den årlige renten er på 10 %.

Banken hevder at dersom aksjene har en årlig verdiøkning på 12 %, vil hun sitte igjen med en solid fortjeneste på aksjene.

b) Bestem verdien av aksjene i slutten av det 10. året.
Hennes netto fortjeneste etter 10 år er differansen mellom verdien av det hun har betalt på lånet, og verdien av aksjene.

c) Vis at hennes netto fortjeneste etter 10 år il være 51 210, 57 kroner.

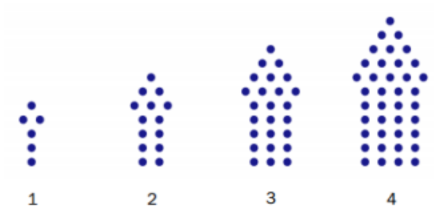
I stedet for å ta opp dette lånet for å kjøpe aksjer vurderer Lise heller å spare. I slutten av hvert år vil hun sette 16 274,54 kroner inn på en konto med en fast årlig rente. Det første beløpet setter hun inn om ett år.

d) Hva må sparerenten være for at hun skal ha like mye penger i banken om 10 år som verdien av aksjene i oppgave b)?

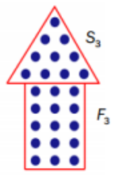
Oppgave 8

Antall prikker i figurene nedenfor kaller vi for piltallene P_n. Vi ser at $P_1 = 6$ og $P_2 = 14$.

a) Skriv opp de fem første piltallene.



Maria ser at hun kan dele figurene i to slik at hun får en «pilspiss» og et «rektangel». Da er samlet antall prikker $P_n = S_n + F_n$, der S_n er antall prikker i «pilspissen» og F_n er antall prikker i «rektangelet». Figuren nedenfor viser denne oppdelingen for figur nummer 3.

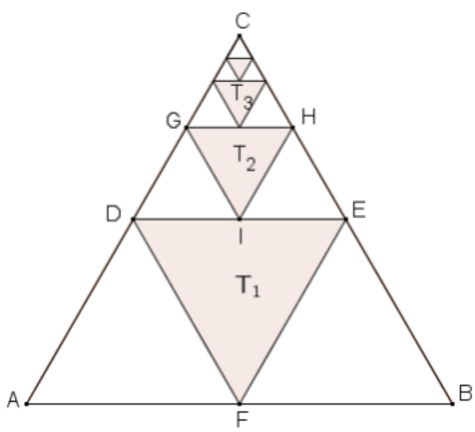


b) Forklar at antall prikker i «pilspissen på figur nummer n er gitt ved $S_n = \frac{(n+2)(n+2)}{2}$

c) Bestem en formel for det n-te piltallet P_n.

Oppgave 9

En likesidet $\triangle ABC$ har areal lik T. Midtpunktene på sidene i $\triangle ABC$ er hjørnene i en ny likesidet trekant $\triangle DEF$ med areal lik T_1. Midtpunktene på sidene i $\triangle CDE$ er hjørnene i en ny likesidet $\triangle GHI$ med areal lik T_2. Etter samme metode lager vi trekanter med areal T_3, T_4 og så videre. Denne prosessen tenker vi oss fortsetter i det uendelige. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at rekken av arealer $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \frac{T}{64} + \ldots$$

b) Vis ved regning eller ved å studere figuren at summen av rekken er lik $\frac{T}{3}$.

c) Omkretsen av $\triangle ABC$ er lik 3. Trekanten som har areal lik T_n har omkrets lik O_n. Forklar at rekken av omkretser $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$$

Bestem summen av rekken.

Oppgave 10

Line arver 100 000 kroner og vil spare pengene til en ny bil. I begynnelsen av et år setter hun dette beløpet på en konto med fast årlig rente på 4,5 %. I tillegg bestemmer hun seg for å sette 12 000 kroner inn på kontoen i begynnelsen av hvert av de neste årene.

a) Hvor mye penger står det på kontoen etter 3 år?

b) Hvor mange år må hun spare dersom det skal stå 200 000 kroner på kontoen?

c) For å få råd til «drømmebilen» må hun likevel låne 150 000 kroner til en rente på 6,0 % per år.
Hun vil bruke 5 år på å betale ned lånet. Det første avdraget betaler hun ett år etter låneopptaket.
Hvor mye må hun betale hvert år?

d) Line synes at det årlige beløpet blir altfor høyt. Hun vil betale halvparten så mye hvert år.
Hvor lang tid tar det før lånet da er nedbetalt, dersom renten fortsatt er 6,0 % per år?

Oppgave 11

For å få ungdom til å studere realfag, tenker vi oss en ny ordning for studiefinansiering.
Betingelsene er som følger:

- Lånet er rente- og avdragsfritt i studietida.
- Studenten betaler bare avdrag og ikke renter når studiene er avsluttet.
- Studenten betaler første avdrag på 15 000 kroner ett år etter at studiet er avsluttet. Deretter skal de årlige avdragene økes med 5 % hver år.

En student skal låne i alt 450 000 kroner.

a) Hvor stort blir det 2. avdraget og det 8. avdraget?

b) Hvor mye betaler studenten tilbake i alt i løpet av de 8 første avdragene?

c) Hvor mange år vil det ta før hele lånet er tilbakebetalt?

d) Hvor stort blir det siste avdraget?

Oppgave 12

Tre påfølgende kvadrattall kan alltid skrives på formen $n^2, (n+1)^2$ og $(n+2)^2$. Med for eksempel $n = 1$, får vi kvadrattallene 1 , 4 og 9 .

Summen av tre påfølgende kvadrattall er 365.

a) Sett opp en likning, løs denne og bestem n og de tre kvadrattallene.

Summen av to påfølgende kvadrattall er 365.

b) Bestem n og de to kvadrattallene.

Oppgave 13

Vi har gitt rekken

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

a) 1) Bestem S_{10}
2) Finn et uttrykk for S_n.

b) Hvor mange ledd må vi ta med for at S_n skal overstige $1\ 000\ 000$?

Oppgave 14

Et ungt par skal kjøpe seg leilighet. Den koster 1 500 000 kroner. De må låne hele beløpet. Paret får tilbud om et annuitetslån til en rente på 4 % per år. De må betale 20 like store årlige beløp. Det første beløpet skal betales ett år etter at lånet er innvilget

a) Finn ved regning hvor stort det årlige beløpet blir?

Dette synes paret blir for dyrt. De kan maksimalt betjene et lån som har en fast årlig innbetaling på $100\ 000$ kroner.

b) Bestem ved regning hvor mange like store årlige beløp de da må betale?

Paret synes at denne nedbetalingen tar for lang tid. De ønsker seg 20 årlige innbetalinger, og ser seg derfor om etter et bedre rentetilbud.

c) Hva må renten per år være for at de årlige beløpene ikke skal overstige 100 000 kroner?

Paret finner ikke et så godt rentetilbud som de trenger. De bestemmer seg derfor for å spare først og så låne restbeløpet, som skal nedbetales med 20 årlige innbetalinger på 100 000 kroner hver. De forutsetter at en leilighet fremdeles koster 1 500 000 kroner, og at lånerenten er 4 %.

d) Hvor stort beløp må stå på sparekontoen når paret låner restbeløpet?

Oppgave 15

En type tabletter inneholder 75 mg av et visst stoff. Når en pasient har dette stoffet i kroppen, vil mengden av stoffet bli halvert i løpet av hver sjette time.

a) En pasient tar bare en, 1, slik tablett. Hvor mange milligram av dette stoffet vil pasienten ha igjen i kroppen etter 36 timer?

b) En annen pasient får en slik tablett hver tolvte time.

1) Forklar at antall milligram av stoffet som er i pasienten etter 72 timer, like etter at den sjette tabletten er tatt, er

$$75 + 75 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25^2 + 75 \cdot 0,25^3 + 75 \cdot 0,25^4 + 75 \cdot 0,25^5$$

2) Bruk en sumformel og finn summen av denne rekken.

3) Hvor mange milligram av stoffet vil samles i kroppen i det lange løp når pasienten får en tablett hver tolvte time?

En bestemt pasient bør ikke ha en samlet mengde på mer enn 80 mg av dette stoffet i kroppen.

c) Finn ved regning hvor mange milligram av stoffet hver tablett kan inneholde dersom denne pasienten skal ta en tablett i døgnet over lang tid.

Oppgave 16

Signe bestemmer seg for å spare penger. Hun vil sette inn 30 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet skal settes inn om ett år. Renten er 4 % per år i hele spareperioden.

a) Hvor mye penger har Signe på kontoen rett etter at hun har satt inn det åttende beløpet?

b) Finn ved regning hvor lenge Signe må spare for at det skal stå 400 000 kroner på kontoen.

c) Signe ønsker å ha 400 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn det åttende beløpet. Finn ved regning hvor mye Signe i så fall må sette inn på kontoen hvert år.

Oppgave 17

Vi har gitt andregradsfunksjonen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100000$$

a) Bestem $f'(x)$. Regn ut $f'(0), f'(1), f'(2)$ og $f'(3)$.

b) Forklar at rekken $f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + ...$ er en aritmetisk rekke der første ledd er $a_1 = -2000$ og differansen er $d = 20$.

c) Vis at summen av de n første leddene er gitt ved uttrykket

$$S_n = 10 \cdot n^2 - 2010 \cdot n$$

I et land ble det født 100 000 barn. Etter x år er antall gjenlevende i dette kullet gitt ved modellen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + +100000 \ , \ x \in \left[0, 100\right]$$

d) Regn ut $S_{100} = f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + ... + f'(99)$
Tolk svaret du kommer fram til.

Oppgave 18

Det n-te leddet i en rekke er gitt ved

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

a) Skriv de fire første leddene i rekken. Vis at rekken er geometrisk, og finn kvotienten k.

b) Bestem ved regning hvor mange ledd du minst må ta med i rekken for at $S_n \; 0,999$.

c) Avgjør om rekken konvergerer. Finn eventuelt summen. En pasient som er kronisk syk, tar hver dag en tablett som inneholder 0,33 mg av en bestemt medisin. Kroppen bryter ned 33,3 % av denne medisinen på ett døgn. Hvis pasienten har mer enn 1,5 mg av denne medisinen lagret i kroppen, kan det gi alvorlige bivirkninger.

d) Ville du ha anbefalt denne medisinbehandlingen for pasienten? Begrunn svaret ditt

Oppgave 19

Anne vil spare for å kjøpe bil. Hun setter inn 20 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Renten er 6 % per år i hele spareperioden.

a) Finn ut hvor mye som står på kontoen rett etter at det fjerde beløpet er satt inn. Sett opp et uttrykk for hvor mye som står på Annes konto rett etter at det n-te beløpet er satt inn. Bilen hun vil kjøpe, koster 330 000 kroner.

b) Hvor lenge må Anne spare før det er 330 000 kroner på kontoen?
Anne ønsker å kunne kjøpe bilen like etter at det 10. beløpet er satt inn.

c) Hvor stort beløp må hun da sette inn på kontoen i begynnelsen av hvert år?

Oppgave 20

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttallene.

a) Skriv opp de 6 første trekanttallene $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ og de fem første summene $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S$

Nedenfor er et utsnitt av Pascals trekant. Skriv av dette utsnittet i besvarelsen din, og marker der de seks første trekanttallene og de fem første summene.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

b) Forklar at $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

c) Bruk digitale hjelpemidler, og finn summen av de 50 første trekanttallene.

I Pascals trekant er n-te rad gitt ved binomialkoeffisientene

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

d) Bruk Pascals trekant og det du fant i a) til å forklare at $a_n = \binom{n+1}{2}$ og $S_n = \binom{n+2}{3}$

Dette arbeidsheftet : Løsningsforslag :

17. januar 2024