Oppgaver S2 - funksjoner

DEL 1

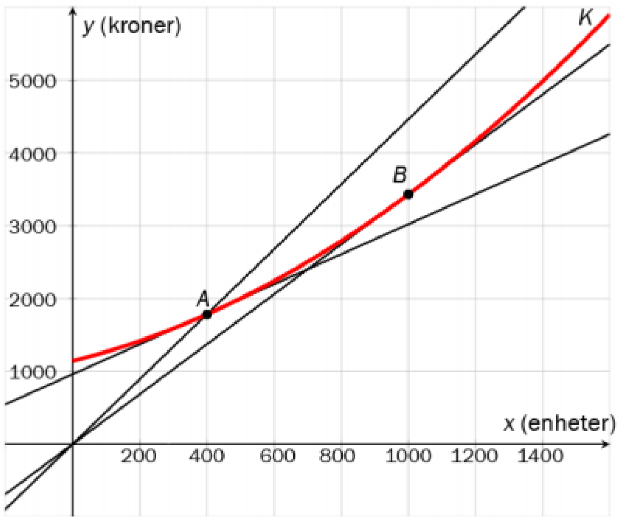
Oppgave 1 (5 poeng)

I koordinatsystemet ser du grafen til en kostnadsfunksjon K, markert med rødt på figuren. Det er også tegnet inn tre rette linjer. Disse har likningene

$y=4,46x$, $y=3,43x$ og $y=2,06x+960$

To av linjene tangerer grafen til funksjonen $y=K(x)$ i henholdsvis A og B.

Enhetskostnaden ved produksjon av x enheter er $\frac{K(x)}{x}$.



a) Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter.

Enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter, $\frac{K(400)}{400}$, er lik stigningstallet til den rette linjen gjennom punktene origo og $A=(400,K(400))$. Denne linjen må være gitt med likningen $y=4,46x$ siden det er den av de oppgitte linjene gjennom origo som har størst stigningstall. Enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter er derfor 4,46 kroner per enhet.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er 2,06 kroner per enhet.

Grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er lik stigningstallet til tangenten til K i A. Det vil si stigningstallet til linjen gitt ved likningen $y=2,06x+960$.

Grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er derfor lik 2,06 kroner per enhet.

c) Bestem den minste enhetskostnaden.

Enhetskostnaden ved produksjon av x enheter, $\frac{K(x)}{x}$, er lik stigningstallet til den rette linjen gjennom punktene origo og $P=(x,K(x))$. Siden linjen gitt ved $y=3,43x$ tangerer K i B, må dette være linjen med lavest stigningstall gjennom punktene origo og $P=(x,K(x))$. Den minste enhetskostnaden er derfor 3,43 kroner per enhet.

Oppgave 2 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem hvilke punkter på grafen til f som har tangent med stigningstall lik 2.

Stigningstallet til tangenten er lik den deriverte. Jeg finner derfor $f'(x)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

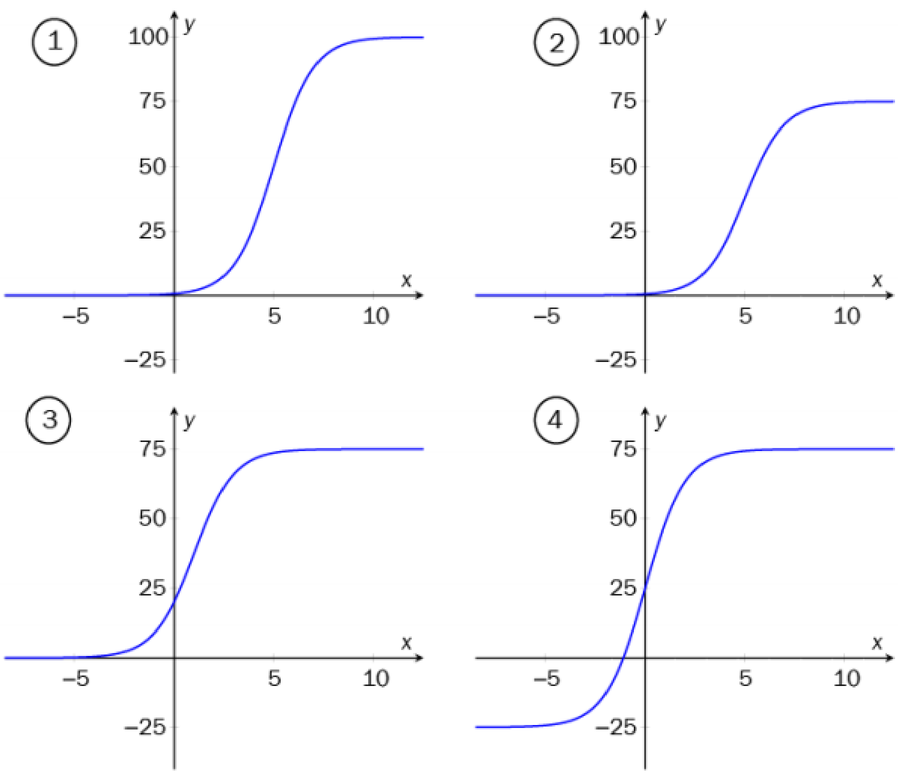
Når tangenten har stigningstall lik 2, er

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ 3x^2 - 6x + 2 &= 2 \\ 3x^2 - 6x &= 0 \\ 3x(x-2) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

Punkter på grafen med stigningstall lik 2 er da $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0,-2)}}$ og

$(2, f(2)) = (2, 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2) = (2, 8 - 12 + 4 - 2) = \underline{\underline{(2,-2)}}$

Oppgave 3 (4 poeng)



På figuren ovenfor er det tegnet fire grafer.

Avgjør hvilken graf som hører til funksjonen f og hvilken graf som hører til funksjonen g når

$$f(x)=\frac{100}{1+e^{-x}}-25 \qquad \text{og} \qquad g(x)=\frac{100}{1+e^{-(x-5)}}$$

Begrunn svaret ditt.

$g(x)=\dfrac{100}{1+e^{-(x-5)}}$ nærmer seg verdien $\dfrac{100}{1+0}=100$ når x blir stor. Allerede når $x=10$, er nevneren $1+e^{-(10-5)}=1+\dfrac{1}{e^5}$ veldig nærme 1. Det betyr at graf 1 hører til $g(x)$ siden dette er den eneste grafen som nærmer seg 100 når x blir stor.

$f(x)=\dfrac{100}{1+e^{-x}}-25$ nærmer seg verdien $\dfrac{100}{1+0}-25=100-25=75$ når x blir stor.

$f(0)=\dfrac{100}{1+e^0}-25=\dfrac{100}{2}-25=25$ og $f(-5)=\dfrac{100}{1+e^{-(-5)}}-25=\dfrac{100}{1+e^5}-25\approx-25$.

Det betyr at graf 4 hører til $f(x)$ siden dette er den eneste grafen som oppfyller alle tre kravene.

Oppgave 4 (4 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter for en bedrift. De totale kostnadene $K(x)$ er gitt ved

$$K(x)=20\,000+120x+0{,}05x^2$$

Prisen $p(x)$ for én enhet er gitt ved

$$p(x)=480-0{,}1x$$

a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.

$$I(x)=x\cdot p(x)=x\cdot(480-0{,}1x)=\underline{\underline{-0{,}1x^2+480x}}$$

Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bestem den produksjonsmengden som gir det største overskuddet.

$$O(x)=I(x)-K(x)=-0{,}1x^2+480x-\left(20\,000+120x+0{,}05x^2\right)=\underline{\underline{-0{,}15x^2+360x-20\,000}}$$

$O(x)=-0{,}15x^2+360x-20\,000$

$O'(x)=-0{,}30x+360$

$O'(x)=0 \;\Rightarrow\; -0{,}30x+360=0 \;\Rightarrow\; 0{,}30x=360 \;\Rightarrow\; x=1200$

$O''(x)=-0{,}30$

Den deriverte til overskuddsfunksjonen er lik null og den dobbeltderiverte er negativ. Det viser at overskuddsfunksjonen har et toppunkt for $x=1200$.

<u>En produksjonsmengde på 1 200 enheter gir størst overskudd.</u>

Oppgave 5 (4 poeng)

En bedrift produserer en vare. De totale kostnadene K ved produksjon av x enheter kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Vi får vite at

- kostnadene er 3000 når det produseres 10 enheter
- kostnadene er 8000 når det produseres 20 enheter
- grensekostnadene ved produksjon av 10 enheter er 350

a) Forklar at dette gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 3000 \\ 400a + 20b + c &= 8000 \\ 20a + b &= 350 \end{aligned}$$

$$K(10) = 3000 \Rightarrow a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 3000 \Rightarrow 100a + 10b + c = 3000$$
$$K(20) = 8000 \Rightarrow a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 8000 \Rightarrow 400a + 20b + c = 8000$$
$$K'(10) = 350 \Rightarrow 2a \cdot 10 + b = 350 \Rightarrow 20a + b = 350$$

Løs likningssystemet.

$$100a + 10b + c = 3000 \quad \Rightarrow \quad c = 3000 - 100a - 10b$$

Det gir

$$\begin{aligned} 400a + 20b + 3000 - 100a - 10b &= 8000 \\ 300a + 10b &= 5000 \\ 30a + b &= 500 \\ b &= 500 - 30a \end{aligned}$$

$$20a + b = 350 \Rightarrow 20a + 500 - 30a = 350 \Rightarrow -10a = -150$$

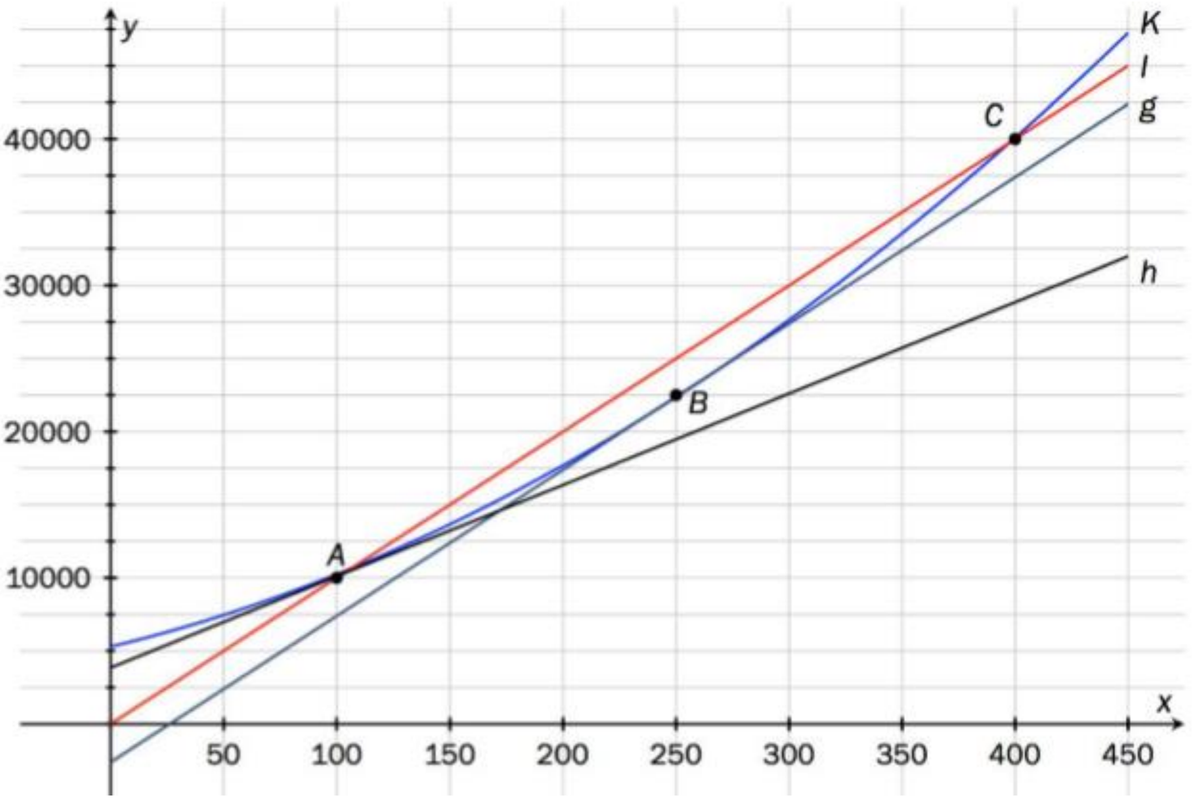
$$\Rightarrow a = \underline{\underline{15}}$$

$$b = 500 - 30 \cdot 15 = \underline{\underline{50}}$$

$$c = 3000 - 100 \cdot 15 - 10 \cdot 50 = \underline{\underline{1000}}$$

Oppgave 6 (5 poeng)

På figuren har vi tegnet grafen til en kostnadsfunksjon K (blå graf) og en inntektsfunksjon I (rød graf). Her er $K(x)$ de daglige kostnadene ved å produsere og selge x enheter. Både kostnader og inntekter er regnet i kroner.



På samme figur har vi også tegnet inn to tangenter til grafen til K. Disse er gitt ved

$$g(x) = 100x - 2613$$
$$h(x) = 62{,}5x + 3850$$

a) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge daglig for at den skal ha et overskudd?
Produksjonen må da ligge mellom 100 og 400 enheter daglig.

b) Bestem grensekostnaden ved produksjon og salg av 100 enheter.
Grensekostnaden her er lik stigningstallet til $h(x)$, altså lik 62,5.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig?
Grafene til funksjonene $I(x)$ og $g(x)$ er parallelle for $x = 250$. Da er $I'(x) = K'(x)$.
Overskuddet er størst når det produseres og selges 250 enheter daglig.

Oppgave 7 (6 poeng)

Totalkostnaden i kroner ved produksjon av en vare er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 70x + 4000 \quad , \qquad 0 < x < 2000$$

Her er x antall produserte enheter per uke.

Inntekten i kroner ved denne produksjonen er gitt ved

$$I(x) = -0{,}05x^2 + 280x \quad , \qquad 0 < x < 2000$$

a) Bestem $K'(500)$ og $I'(500)$. Bruk svarene til å vurdere om bedriften bør produsere flere enn 500 enheter.

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 70x + 4000 \quad , \qquad 0 < x < 2000$$
$$K'(x) = 0{,}2x + 70$$
$$K'(500) = 0{,}2 \cdot 500 + 70 = \underline{170}$$
$$I(x) = -0{,}05x^2 + 280x \quad , \qquad 0 < x < 2000$$
$$I'(x) = -0{,}1x + 280$$
$$I'(500) = -0{,}1 \cdot 500 + 280 = \underline{230}$$

Ved en produksjon på 500 enheter koster det 170 kroner å produsere én ekstra enhet, mens inntekten er på kroner 230.
Bedriften bør derfor produsere flere enn 500 enheter.

b) Bestem den vinningsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir størst overskudd.

Størst overskudd når

$$K'(x) = I'(x)$$
$$0{,}2x + 70 = -0{,}1x + 280$$
$$0{,}3x = 210$$
$$x = \underline{\underline{700}}$$

c) Bestem den kostnadsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet.

Jeg kaller enhetskostnaden for $E(x)$. Lavest kostnad per enhet når $E'(x)=0$

$$E(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{0{,}1x^2+70x+4000}{x}$$

$$E'(x)=0$$

$$\left(\frac{0{,}1x^2+70x+4000}{x}\right)'=0$$

$$\frac{(0{,}2x+70)x-1\cdot(0{,}1x^2+70x+4000)}{x^2}=0$$

$$0{,}1x^2=4000$$

$$x^2=40000$$

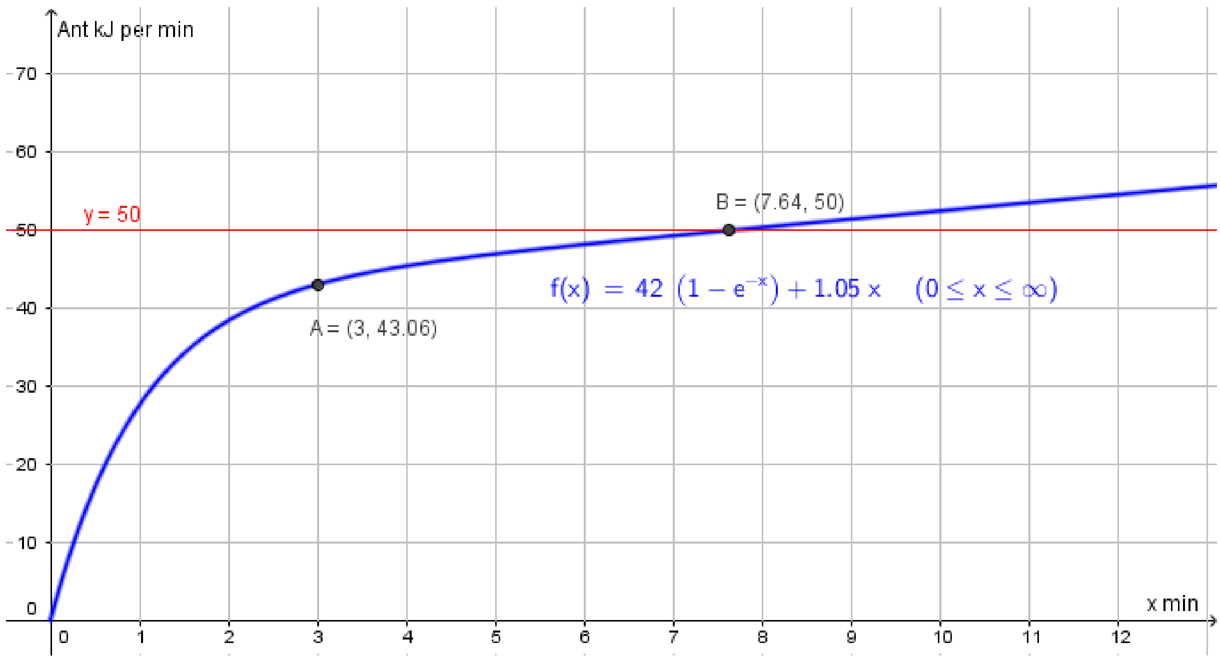
$$x=\underline{\underline{200}} \qquad \text{siden x ikke kan være negativ}$$

DEL 2

Oppgave 1 (8 poeng)

Maria trener på et apparat i et treningssenter. La $f(x)$ være treningseffekten, det vil si antall kilojoule som forbrennes per minutt, x minutter etter starten på treningsøkten. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 42\left(1 - e^{-x}\right) + 1{,}05x \qquad , \qquad x \geq 0$$



a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bruk grafen til å bestemme treningseffekten etter 3 min og når treningseffekten er 50 kJ/min.

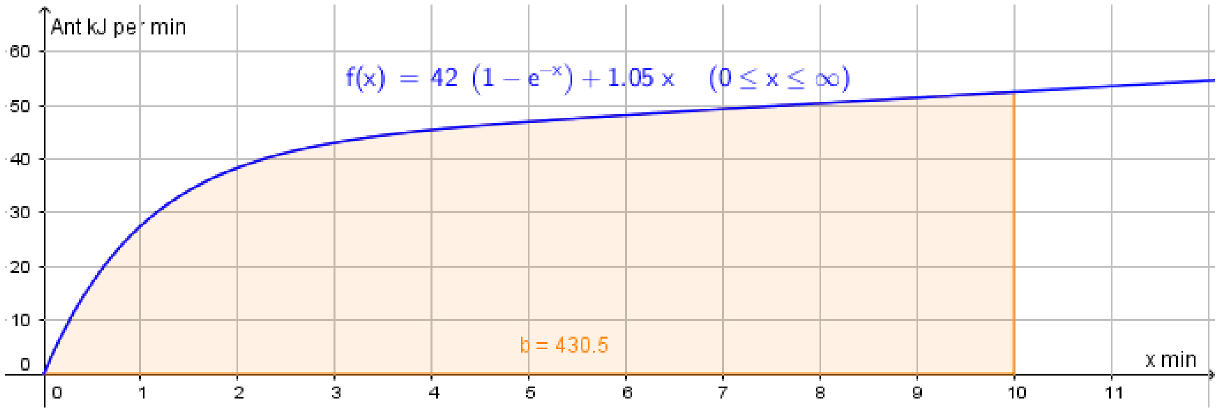
Jeg plotter punktet $(3, f(3))$ og finner at treningseffekten etter 3 min er <u>43 kJ per min</u>. Se punkt A.

Jeg plotter linjen $y = 50$ og finner skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen ved kommandoen «Skjæring mellom to objekt». Punktet B viser at treningseffekten er 50 kJ/min <u>etter 7,6 minutter</u>.

Det samlede energiforbruket E, målt i kilojoule (kJ), i de første t minuttene av treningen er gitt ved

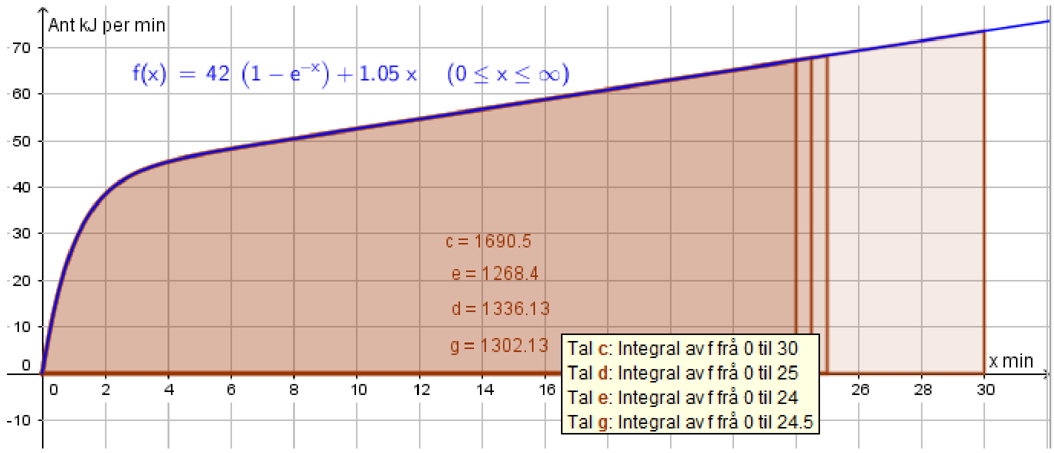
$$E(t)=\int_0^t f(x)\,dx$$

a) Bestem det samlede energiforbruket til Maria i løpet av de første 10 minuttene.



Jeg bruker kommandoen «Integral[f, 0, 10]» og finner samlet energiforbruk som arealet mellom x-aksen og grafen til $f(x)$. Det samlede energiforbruket til Maria i løpet av de første 10 minuttene er <u>430,5 kJ.</u>

b) Anslå hvor lenge Maria må trene for at det samlede energiforbruket skal bli 1300 kJ.



Jeg prøver meg fram med ved å regne ut forskjellige integraler som vist på figuren. Resultatet viser at Maria må trene ca 24,5 minutter for at det samlede energiforbruket skal bli 1300 kJ

Oppgave 2 (8 poeng)

I 1992 skrev forskerne Ward og Whipp en artikkel i tidsskriftet Nature. De brukte regresjon til å hevde at de beste kvinnelige løperne før eller siden vil løpe like raskt som de mannlige på maratondistansen.

I tabellene ser du gjennomsnittsfarten for verdensrekordløp i maraton for noen år.

Menn:

Årstall	1909	1913	1920	1935	1960	1970	1988
Fart (m/s)	4,38	4,51	4,61	4,81	5,20	5,43	5,55

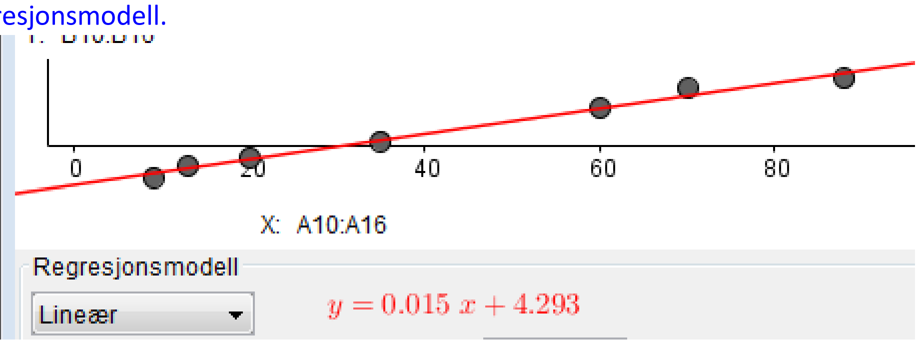
Kvinner:

Årstall	1963	1967	1970	1973	1975	1979	1985
Fart (m/s)	3,24	3,75	3,85	4,22	4,44	4,77	4,98

a) Lag lineære modeller f og g for farten til menn og kvinner. La x være antall år etter 1900.

Jeg la verdiene fra tabellen for menn inn i regnearket i GeoGebra og valgte regresjonsanalyse med «Lineær» som regresjonsmodell.

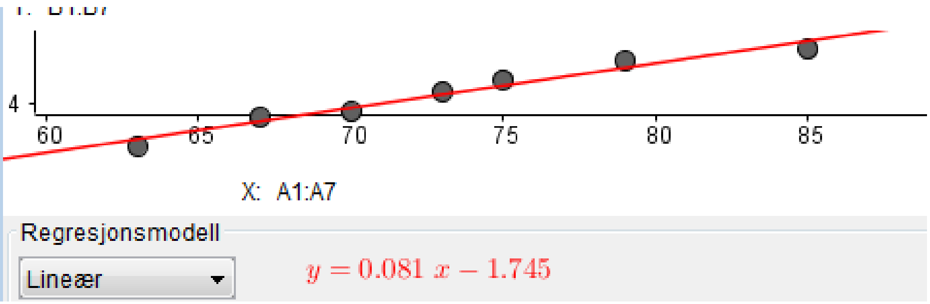
63	3.24
67	3.75
70	3.85
73	4.22
75	4.44
79	4.77
85	4.98



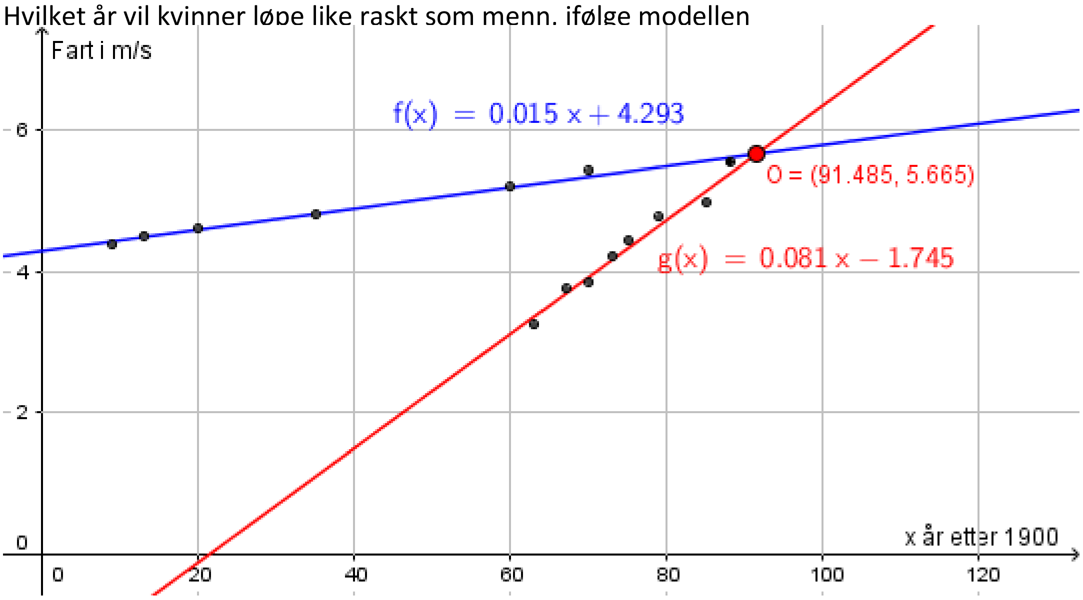
Jeg fikk modellen $f(x) = 0{,}015x + 4{,}293$

Jeg gjorde tilsvarende med tabellen for kvinner og fikk modellen $g(x) = 0{,}081x - 1{,}745$.

63	3.24
67	3.75
70	3.85
73	4.22
75	4.44
79	4.77
85	4.98



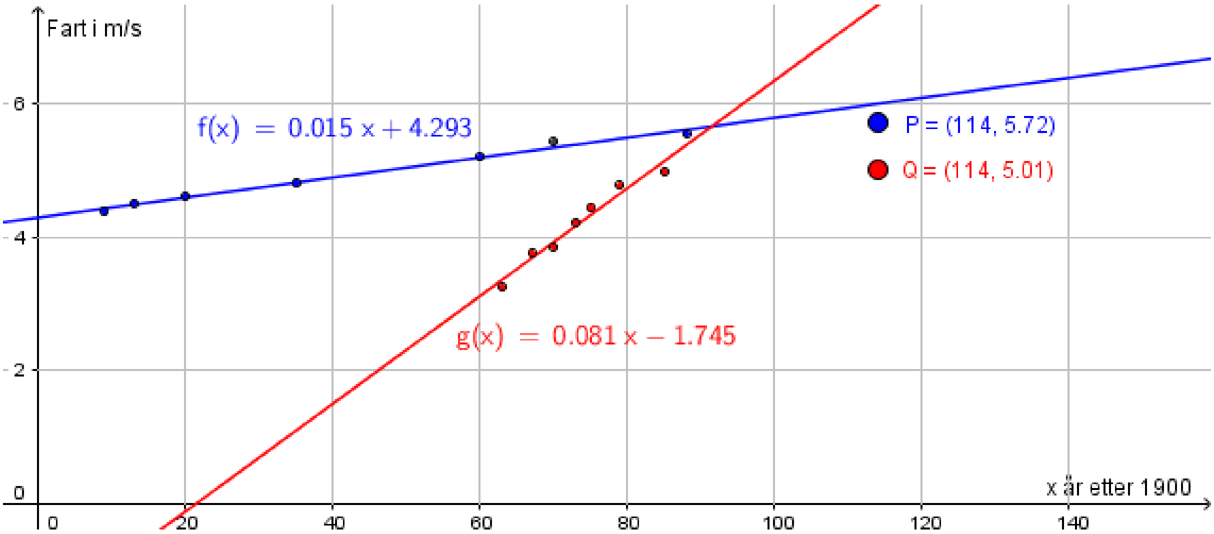
b) Hvilket år vil kvinner løpe like raskt som menn, ifølge modellen



Jeg tegner grafene til begge modellene og finner skjæringspunktet mellom grafene ved kommandoen «Skjæring mellom to objekt». Se punkt O.
Ifølge modellen vil kvinner løpe like raskt som menn i år 1991. Se punkt O.

Raskeste mannlige løper (Dennis Kimetto) løp i 2014 med en gjennomsnittsfart på 5,72 m/s, mens beste kvinnelige løper (Tirfi Tsegaye) samme år løp med en gjennomsnittsfart på 5,01 m/s.

c) Hvordan vurderer du gyldigheten til modellene ovenfor ut fra disse resultatene?

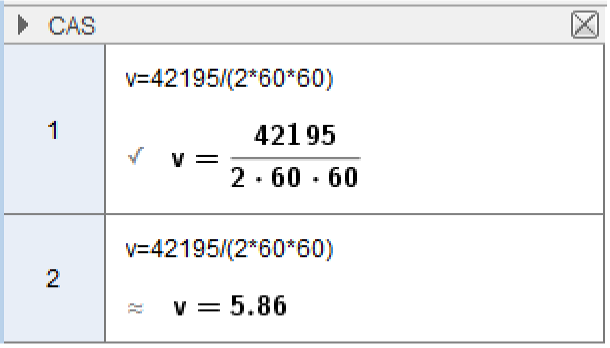


År 2014 er 114 år etter år 1900. Punktet Q viser tydelig at modellen g for kvinner ikke er gyldig i år 2014. Punktet P avviker også så mye fra grafen til f at heller ikke modellen for menn kan sies å være gyldig i år 2014.

En logistisk modell for gjennomsnittlig maratonfart (i m/s) for mennenes rekordløp x år etter 1900 er gitt ved:

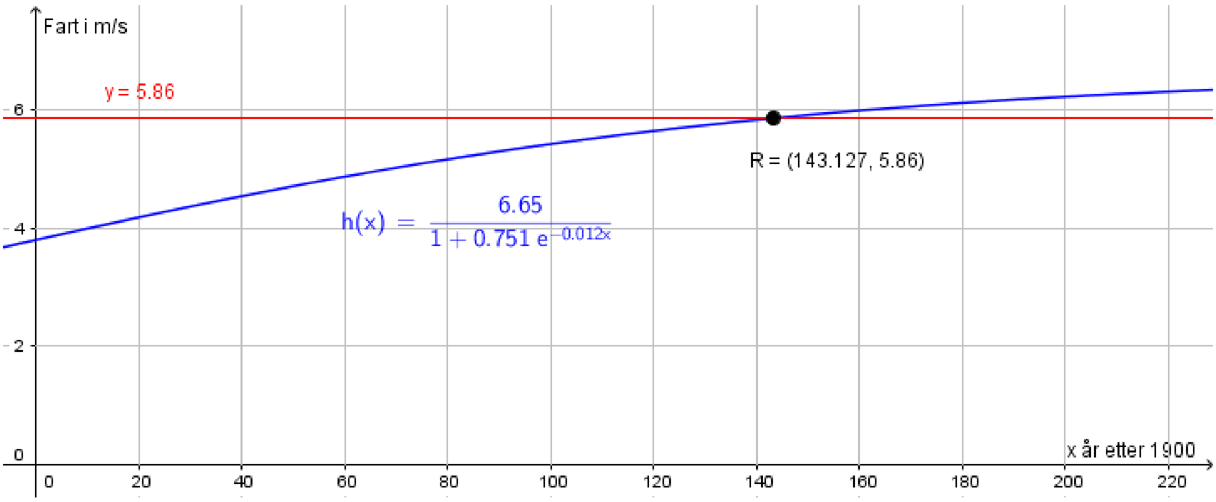
$$h(x)=\frac{6,65}{1+0,751e^{-0,012x}}$$

d) Vi tenker oss at vi kan bruke den logistiske modellen også etter år 2000. Hvilket år vil da maraton første gang bli løpt på under to timer? Maratondistansen er 42 195 m.



m/s hvis distansen løpes på to timer.

Jeg finner så skjæringspunktet mellom grafen til $h(x)$ og linjen $y = 5{,}86$ ved kommandoen



Punktet R viser at maraton ifølge denne modellen vil bli løpt på under to timer i år 2043.

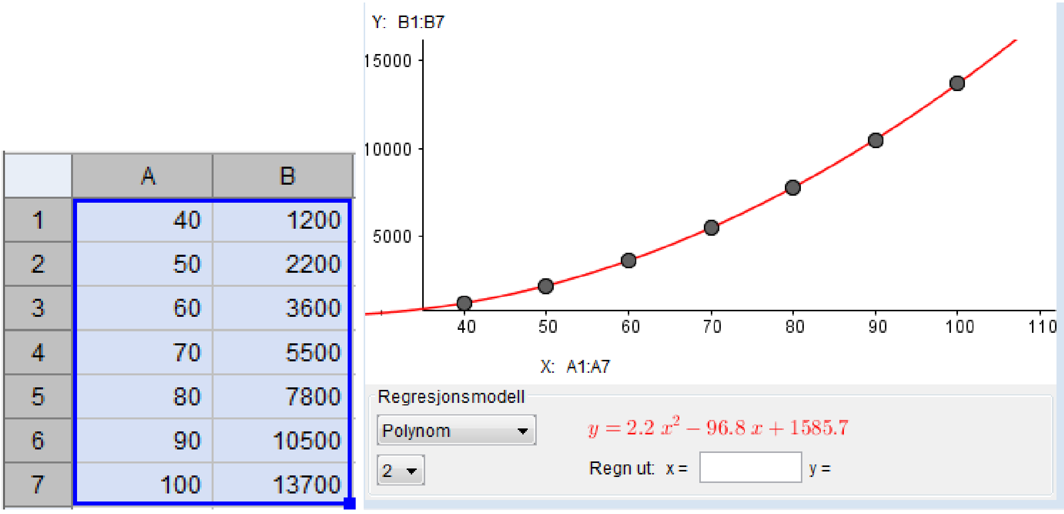
Oppgave 3 (6 poeng)

De daglige kostnadene i kroner til en bedrift som produserer x enheter av en vare per dag er gitt i tabellen nedenfor.

x	40	50	60	70	80	90	100
$K(x)$	1200	2200	3600	5500	7800	10500	13700

e) Bruk regresjon til å bestemme et andregradsuttrykk for $K(x)$.

Jeg la verdiene fra tabellen inn i regnearket i GeoGebra, og valgte regresjonsanalyse med polynomgrad 2 som regresjonsmodell.



Jeg fikk modellen $K(x)=2{,}2x^2-96{,}8x+1586$.

Inntektene I kroner ved salg av x enheter per dag er gitt ved

$$I(x)=p\cdot x \text{, der } p \text{ er prisen på varen og } x\in[40,100]$$

f) Hva må p være dersom overskuddet skal bli størst når det produseres og selges 75 enheter per dag. Hvor stort blir overskuddet da?

Overskuddet er lik inntekt minus kostnad. Jeg definerer kostnads-, inntekts- og overskuddsfunksjonen i CAS i GeoGebra.
Jeg finner videre at $O'(75)=0$ for $p=233$.
Linje 6 i CAS viser at grafen til $O(x)$ vender sin hule side ned og derfor har et toppunkt for $x=75$ når $p=233$.

<u>En pris per enhet på kroner 233 gir maksimalt overskudd når det produseres og selges 75 enheter per dag.</u>

7	O(75) $\approx$ 10774

<u>Overskuddet er da på kroner 10 774 per dag.</u>

CAS

1	K(x):=2.2x^2-96.8x+1586 $\rightarrow\ K(x) := \frac{11}{5}x^2-\frac{484}{5}x+1586$
2	I(x):=p*x $\rightarrow\ I(x) := p\,x$
3	O(x):=I(x)-K(x) $\rightarrow\ O(x) := p\,x-\frac{11}{5}x^2+\frac{484}{5}x-1586$
4	Løs[O'(75)=0, p] NLøs: $\{p=233.2\}$
5	p:=233 $\rightarrow\ p := 233$
6	O''(75) $\approx\ -4.4$

Bedriften har gjort en markedsanalyse. Sammenhengen mellom antall solgte enheter x og prisen p viser seg å være

$$x = 200 - 1{,}2p$$

g) Bestem hvilken pris som vil gi det største overskuddet per dag.

Jeg definerer funksjonene ovenfor i CAS som funksjoner av p hvor jeg erstatter x med $200-1{,}2p$.

CAS

1	K(p):=2.2*(200-1.2p)^2-96.8*(200-1.2p)+1586 ≈ $K(p) := 3.17\,p^2 - 939.84\,p + 70226$
2	I(p):=p*(200-1.2p) ≈ $I(p) := -1.2\,p^2 + 200\,p$
3	O(p):=I(p)-K(p) ≈ $O(p) := -4.37\,p^2 + 1139.84\,p - 70226$
4	O'(p)=0 NLøs: $\{p = 130.48\}$
5	O''(130) ≈ -8.74

Regningen i CAS viser at en pris på 130 kroner per enhet gir størst overskudd per dag.

Oppgave 4 (6 poeng)

I lungene blir oksygen bundet til hemoglobin og transportert rundt i kroppen av blodet. Hemoglobinet er mettet når det ikke er i stand til å ta opp mer oksygen.

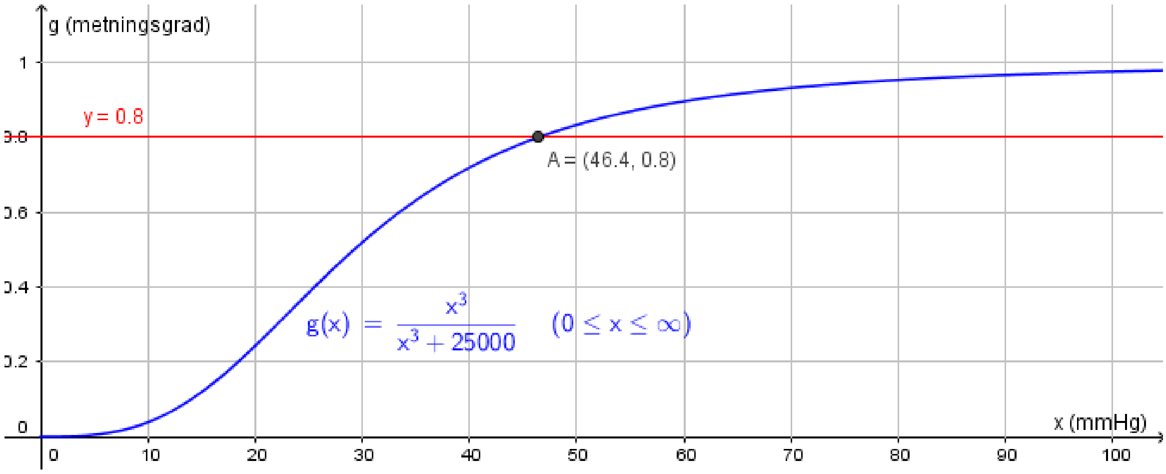
Den engelske fysiologen A.V. Hill oppdaget i 1910 en sammenheng mellom deltrykket til oksygenet i lungene, og metningsgraden g.

Han fant ut at under visse forhold er

$$g(x) = \frac{x^3}{x^3 + 25000} \quad , \quad x > 0$$

Her er deltrykket x målt i mmHg (millimeter kvikksølv).

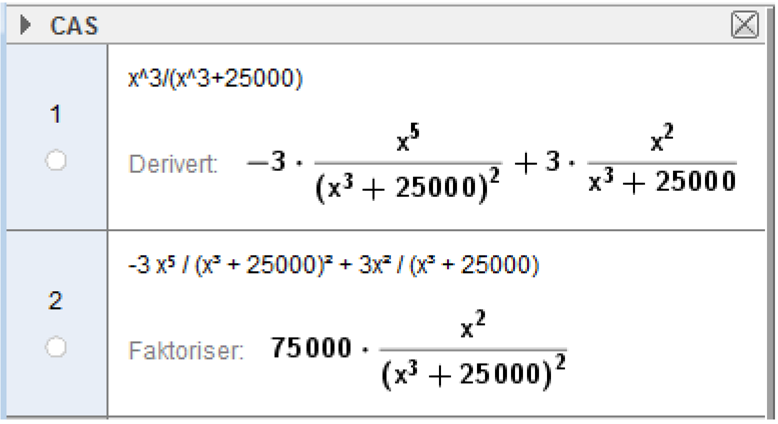
c) Bruk graftegner til å tegne grafen til g.



d) Bestem grafisk hva deltrykket x må være for at metningsgraden $g(x)$ skal være større enn 0,8.

Jeg tegner grafen til linjen $y = 0{,}8$ sammen med grafen til g. Kommandoen «Skjæring mellom to objekt» gir skjæringspunktet mellom grafene. Se punkt A. Vi ser grafisk at <u>deltrykket må være større enn 46,4 mmHg for at metningsgraden skal bli større enn 0,8.</u>

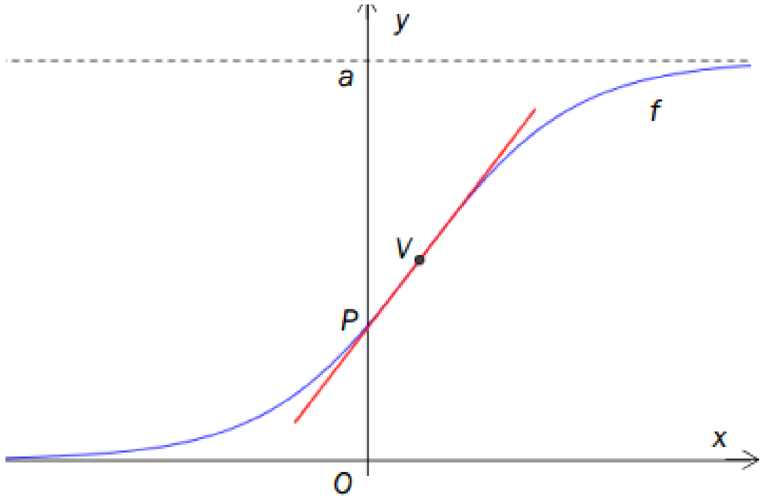
e) Bruk derivasjon til å vise at metningsgraden øker dersom deltrykket øker. Forklar.



Jeg deriverer uttrykket for $g(x)$ i CAS og faktoriserer svaret.
Vi ser at både teller og nevner i uttrykket for den deriverte alltid er positive.
Siden $g'(x)$ alltid er positiv, så vil $g(x)$, metningsgraden, alltid øke når deltrykket x øker.

Oppgave 5 (5 poeng)

Grafen til en logistisk funksjon $f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-k\cdot x}}$ er skissert nedenfor.

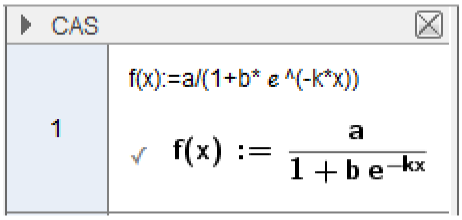


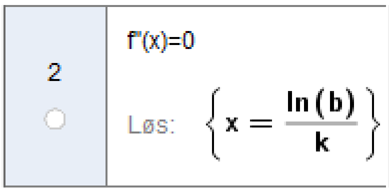
a) Grafen skjærer y-aksen i punktet P. Bestem y-koordinaten til P uttrykt ved a og b.

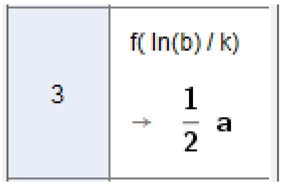
Punktet P har koordinater $(0, f(0))$ hvor $f(0)=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-k\cdot 0}}=\dfrac{a}{1+b\cdot 1}=\underline{\underline{\dfrac{a}{1+b}}}$.

b) Bruk CAS og derivasjon til å vise at vendepunktet V har y-koordinat lik $\dfrac{a}{2}$.

Jeg definerer $f(x)$ i CAS, finner x-koordinaten til V ved å løse likningen $f''(x)=(0)$ og finner så y-koordinaten til V.



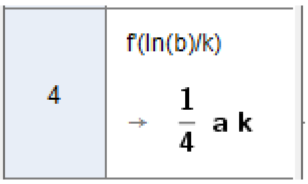




Dette viser at vendepunktet V har y-koordinat lik $\dfrac{a}{2}$.

c) Bruk CAS til å vise at tangenten i V har stigningstall lik $\dfrac{a\cdot k}{4}$.

Tangenten i V har stigningstall lik den deriverte til $f(x)$ i V



Oppgave 6 (7 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter fra en bedrift. Sammenhengen mellom x og prisen per enhet er

$$p(x) = 500 - 0{,}1x$$

a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.

Inntekt er lik pris per enhet multiplisert med antall enheter. Det gir

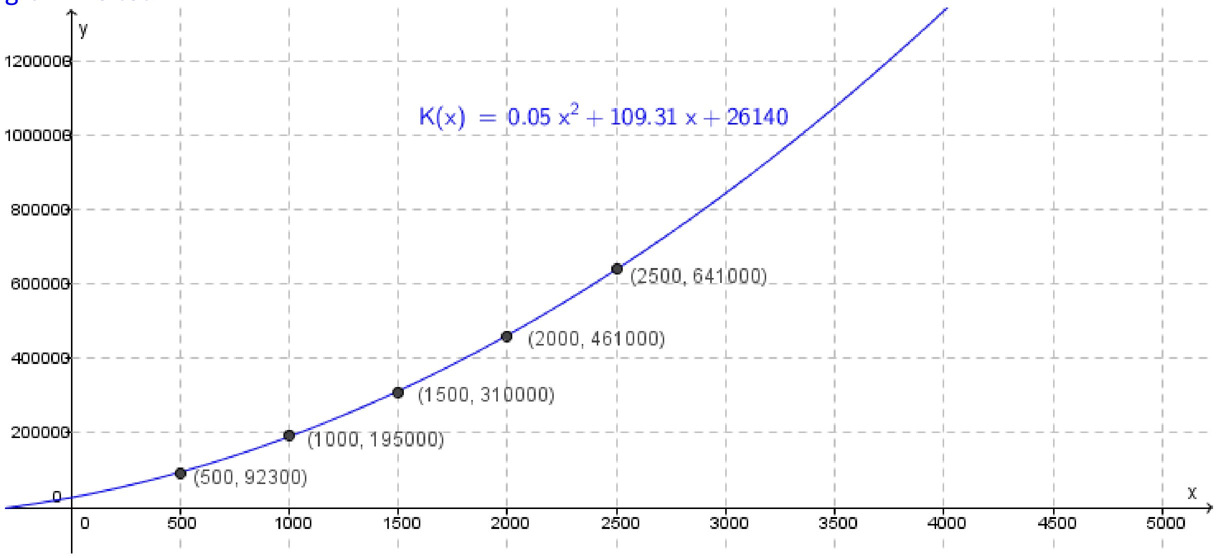
$I(x) = p(x) \cdot x = (500 - 0{,}1x)x = \underline{\underline{-0{,}1x^2 + 500x}}$

Tabellen nedenfor viser kostnaden ved produksjon av x enheter for en del verdier av x

x	500	1000	1500	2000	2500
$K(x)$	92 300	195 000	310 000	461 000	641 000

b) Bruk tabellen til å lage en modell for kostnadsfunksjonen K.

Jeg legger dataene fra tabellen inn som punkter i et regneark i GeoGebra hvor x er antall produserte enheter, og y er kostnadene når det produseres x enheter. Jeg markerer punktene i tabellen, høyreklikker og bruker kommandoen «Lag liste med punkt». Punktene avsettes i grafikkfeltet.



Ved kommandoen «RegPoly[<Liste med punkt>, <Polynomgrad>]» og polynomgrad 2, fikk jeg funksjonen $K(x) = 0{,}05x^2 + 109{,}31x + 26140$ som passet godt med punktene fra tabellen og derfor er en modell for kostnadsfunksjonen.

c) Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bruk $O'(x)$ til å bestemme den produksjonsmengden som gir størst overskudd.

Overskuddet er lik inntekt minus kostnad. Jeg definerer inntektsfunksjonen og overskuddsfunksjonen i CAS i GeoGebra og får

$O(x) = \underline{\underline{-0,15x^2 + 391x + 26140}}$

Jeg finner videre at $O'(x)=0$ for $x=1302$.

1	I(x):=-0.1x^2+500x
	≈ $I(x) := -0.1\,x^2 + 500\,x$
2	O(x):=I(x)-K(x)
	≈ $O(x) := -0.15\,x^2 + 390.69\,x - 26140$
3	O'(x)=0
	NLøs: $\{x = 1302.3\}$

4	O''(1302)
	≈ -0.3

Linje 4 i CAS viser at grafen til $O(x)$ vender sin hule side ned og at $O(x)$ derfor har et toppunkt for $x=1302$.

<u>En produksjonsmengde på 1302 enheter gir størst overskudd.</u>

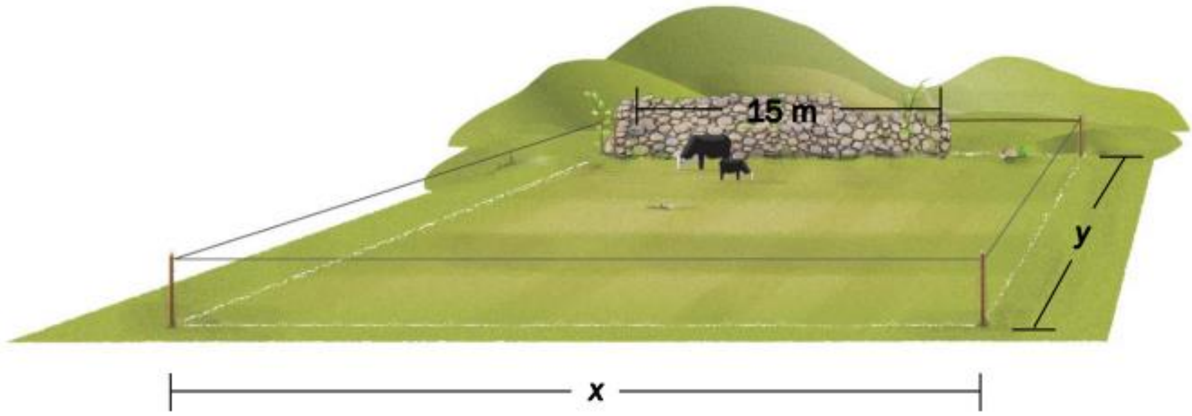
d) Forklar hvorfor løsningen av likningen $K'(x)=I'(x)$ gir samme resultat som i oppgave c).

$$O(x)=I(x)-K(x) \quad \Rightarrow \quad O'(x)=K'(x)-I'(x)$$

$$O'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad K'(x)-I'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad K'(x)=I'(x)$$

Oppgave 7 (5 poeng)

En bonde skal gjerde inn kuene sine på et rektangelformet område. Området skal være på 625 m^2. Bonden skal bruke en 15 m lang steinmur som en del av inngjerdingen.
Se skissen nedenfor.



f) Vis at en funksjon G som beskriver lengden av gjerdet kan skrives som

$$G(x)=\frac{2x^2-15x+1250}{x} \quad \text{når} \quad x>15$$

Lengden av gjerdet $\quad G=x+2y+(x-15)$ hvor $x\cdot y=625$ og $x\geq 15$.

$$x\cdot y=625 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{625}{x}$$

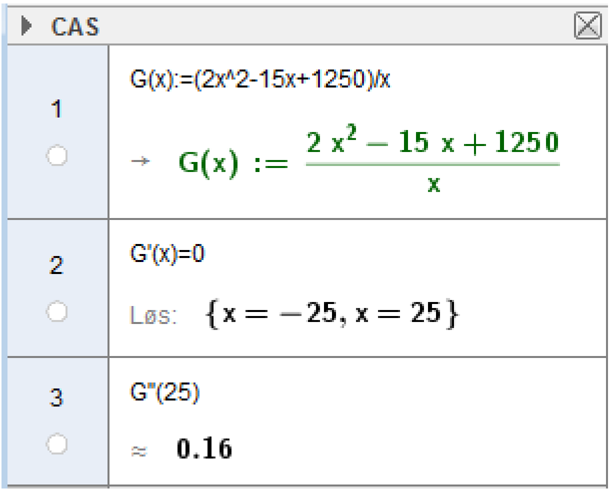
Det betyr at

$$\begin{aligned} G(x)&=2x+2\frac{625}{x}-15 \\ &=\frac{2x^2}{x}+\frac{1250}{x}-\frac{15x}{x} \\ &=\underline{\underline{\frac{2x^2-15x+1250}{x}}} \end{aligned}$$

g) Bestem hvor langt gjerde bonden må bruke dersom han skal bruke kortest mulig gjerde. Hvilken form har da området til bonden?

Regningen i CAS viser at bonden bruker kortest mulig gjerde når $x=25$ meter. Da er $y=\frac{625}{25}=25$ meter. Gjerdet er da $4\cdot 25\text{ m}-15\text{ m}=\underline{\underline{85\text{ m}}}$.

Området har da form som et kvadrat.



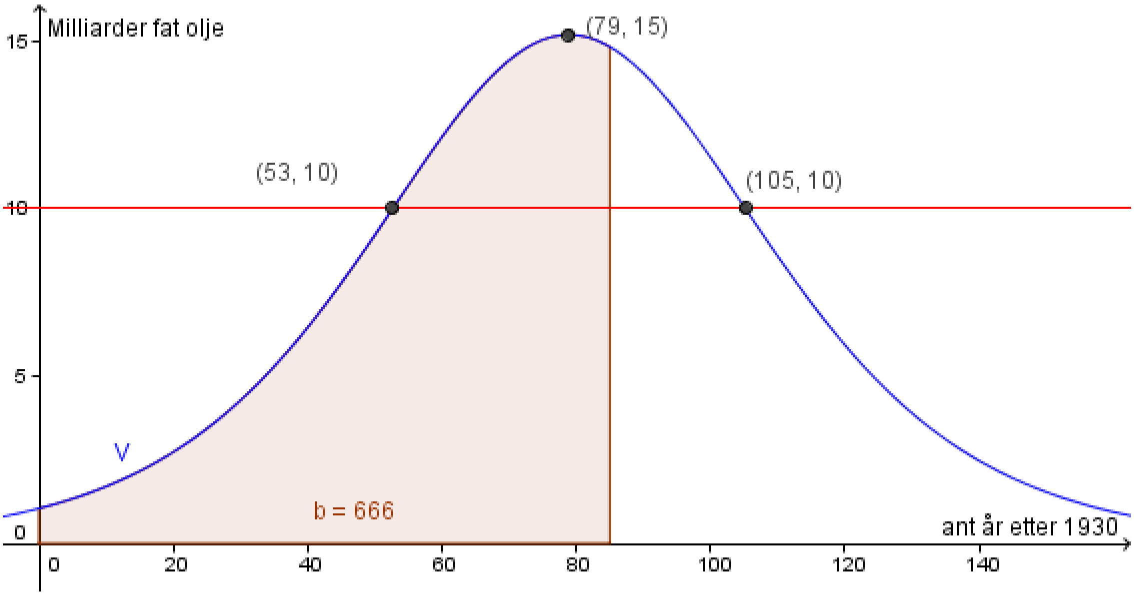
Oppgave 8 (6 poeng)

Den amerikanske geofysikeren Marion King Hubbert lanserte i 1956 følgende modell for verdens årlige oljeforbruk:

$$V(t)=\frac{3400\cdot e^{-0,051\cdot t}}{\left(1+56\cdot e^{-0,051\cdot t}\right)^2}$$

Her er $V(t)$ antall milliarder fat olje som produseres i år t etter 1930. For eksempel er $V(5)$ antall milliarder fat som ble produsert i 1935

a) Tegn grafen til V.



b) Når vil produksjonen være 10 milliarder fat per år ifølge modellen?
Jeg finner skjæringspunktene mellom grafen til V og linjen $y=10$ grafisk ved kommandoen «Skjæring mellom to objekt» .
Produksjonen vil ifølge denne modellen være 10 milliarder fat per år, 53 og 105 år etter 1930.
<u>Det vil si i årene 1983 og 2035.</u>

c) Hvilket år vil produksjonen være størst?
Jeg finner maksimal produksjon grafisk ved kommandoen «Ekstremalpunkt[V,0,140]» .
Produksjonen vil ifølge denne modellen være størst 79 år etter 1930.
<u>Det vil si i år 2009.</u>

d) Hva vil den totale produksjonen av olje være i årene fra og med 1930 til og med 2014?
Jeg finner samlet produksjon ved kommandoen «integral[V,0,85]».Til og med 2014 betyr fram til 2015 som er 85 år etter 1930.
<u>Den totale produksjonen i disse årene er på 666 milliarder fat.</u>

Oppgave 9 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser det totale antallet artikler som var tilgjengelige på Wikipedia noen utvalgte år.

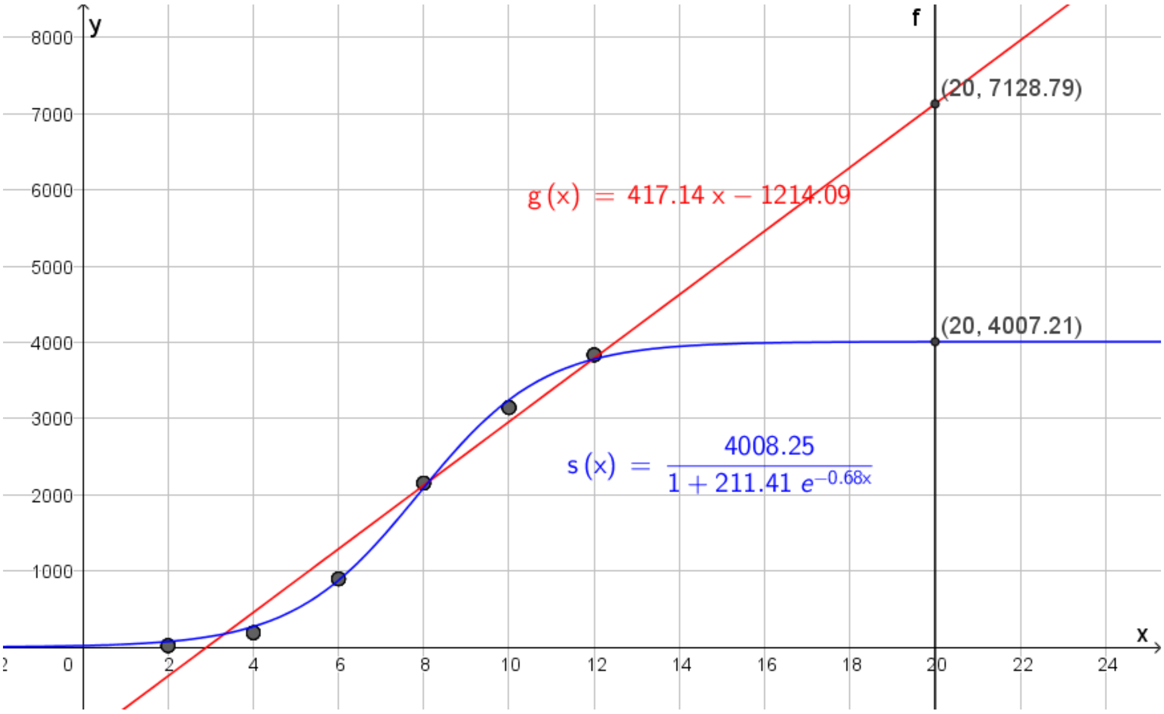
År	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Antall artikler	19 700	188 800	895 000	2 153 000	3 144 000	3 835 000

Basert på disse tallene påstår en journalist at i 2020 vil antallet tilgjengelige artikler være rundt 7 millioner. En annen journalist påstår at antallet artikler vil stabilisere seg på rundt 4 millioner.

a) Vurder hvilke matematiske modeller journalistene kan ha brukt for å komme fram til disse tallene.

Jeg foretok regresjonsanalyse hvor x-verdiene viser 2 antall år etter år 2000 og y-verdiene antall i tusen av tilgjengelige artikler.

Rød graf viser lineær regresjon, og blå graf viser logistisk regresjon.



Ved lineær regresjon vil antall tilgjengelige artikler være rundt 7 millioner i år 2020.

Ved logistisk regresjon vil antall tilgjengelige artikler stabilisere seg på rundt 4 millioner.

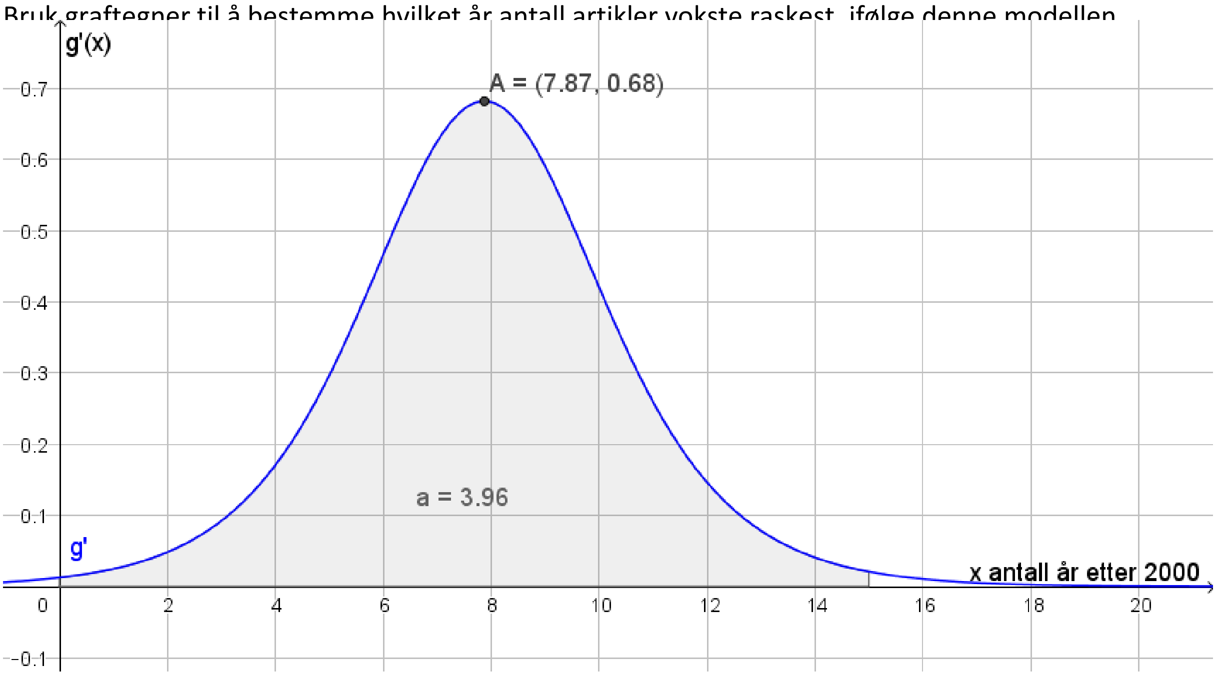
En modell for antallet tilgjengelige artikler er gitt ved en funksjon g.

Økningen i antallet artikler (i millioner) per år er ifølge denne modellen

$$g'(x) = \frac{576e^{-0,68x}}{\left(1+211e^{-0,68x}\right)^2}$$

Her er x antall år etter 2000.

b) Bruk graftegner til å bestemme hvilket år antall artikler vokste raskest, ifølge denne modellen.



Jeg brukte kommandoen "Ekstremalpunkt(g', 2, 12)" og fikk punktet A som viser at antall artikler vokste raskest i slutten av år 2000.

c) Bestem $\int_0^{15} g'(x)\,dx$

Hva er den praktiske tolkningen av dette svaret?

Jeg skrev inn "Integral(g', 0, 15)" som tilsvarer grått areal under grafen. Dette arealet er lik 3,96 millioner. Det betyr at samlet økning i antall artikler de første 15 årene etter år 2000 er 3,96 millioner artikler.

Oppgave 10 (6 poeng)

En bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag. Det viser seg at inntekten I i kroner per dag er gitt ved

$$I(x) = 3200 \cdot \ln(2{,}5x + 1) \quad , \qquad x \geq 0$$

Kostnaden K i kroner per dag kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Erfaringer viser at

- det koster i alt 3225 kroner å produsere 50 enheter per dag
- det koster i alt 4900 kroner å produsere 100 enheter per dag
- grensekostnadene ved å produsere 100 enheter er 41 kroner per enhet

a) Bruk CAS til å bestemme a, b og c. Vis at

$$K'(x) = 0{,}3x + 11$$

CAS

1	I(x):=3200*ln(2.5x+1) → $I(x) := 3200 \ln\left(\frac{5}{2}x + 1\right)$
2	K(x):=a*x^2+b*x+c → $K(x) := a x^2 + b x + c$
3	K(50)=3225 → $2500 a + 50 b + c = 3225$
4	K(100)=4900 → $10000 a + 100 b + c = 4900$
5	K'(100)=41 → $200 a + b = 41$
6	{$3, $4, $5} NLøs: $\{a = 0.15, b = 11, c = 2300\}$
7	a:=0.15 → $a := \frac{3}{20}$
8	b:=11 → $b := 11$
9	c:=2300 → $c := 2300$
10	K'(x) ≈ $0.3 x + 11$

b) Bestem $I'(100)$ og $K'(100)$. Hva forteller svarene oss?

Avgjør ut fra svarene om bedriften bør produsere flere eller færre enn 100 enheter per dag.

11	I'(100)
	≈ 31.87
12	K'(100)
	≈ 41

Å øke produksjonen med én enhet når det produseres 100 enheter, gir en ekstra inntekt på kroner 31,87 og en ekstra kostnad på kroner 41.
Bedriften bør ikke produsere flere enn 100 enheter, sannsynligvis færre.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge per dag for at overskuddet skal bli størst mulig?

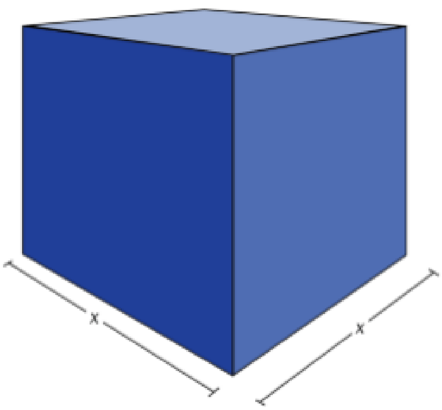
Overskuddet blir størst når $I'(x) = K'(x)$

13	NLøs(I'(x)=K'(x))
	$\approx \{x = -123.39, x = 86.33\}$

Overskuddet blir størst når det produseres 86 enheter.

Oppgave 11 (6 poeng)

En bedrift skal produsere et skap formet som en rett prisme. Skapet skal ha kvadratisk bunn, og volumet skal være 800 L.



Materialet til sideflatene og toppen koster 230 kroner/m^2.
Materialet til bunnen koster 450 kroner/m^2.

a) Vis at de totale materialkostnadene er gitt ved

$$K(x) = 680x^2 + \frac{736}{x}, \qquad x > 0$$

der x er lengden på sidene i bunnen, målt i meter.

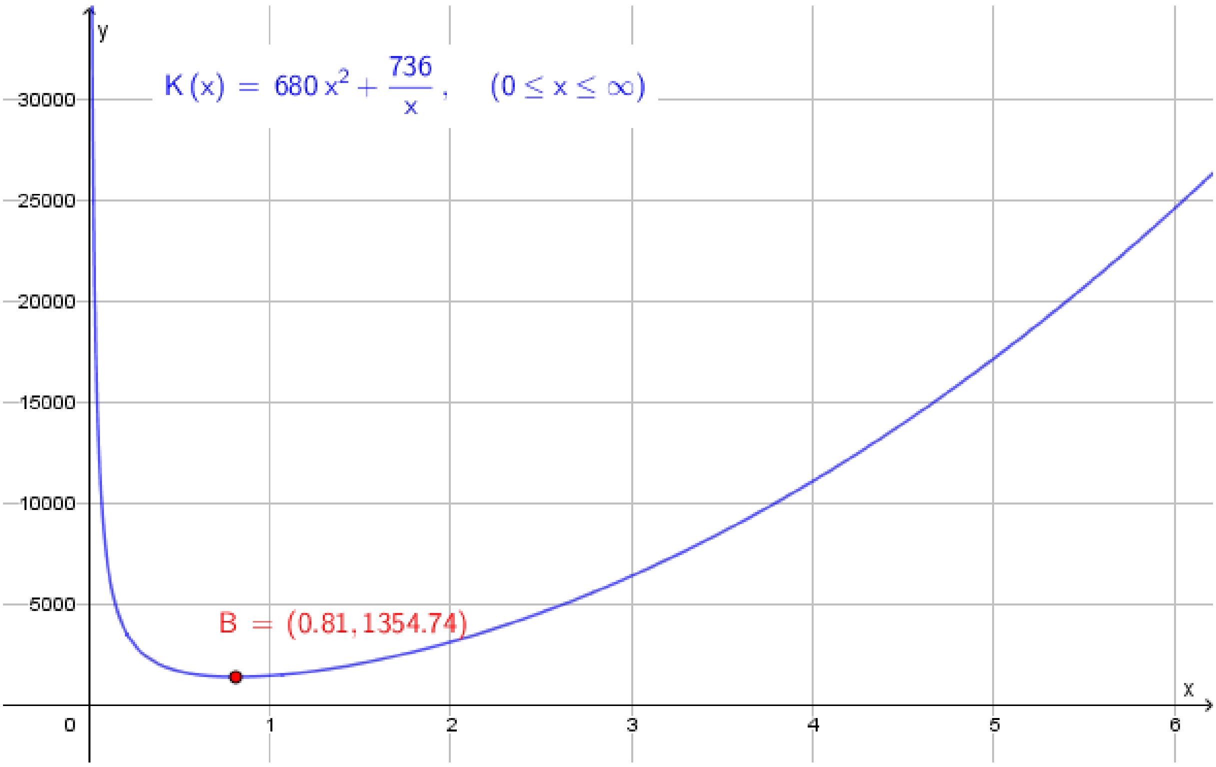
Volumet er 0,8 m^2. Da er høyden i prismet $\frac{0,8}{x^2}$.

$$K(x) = x^2 \cdot 450 + 4 \cdot x \cdot \frac{0,8}{x^2} \cdot 230 + x^2 \cdot 230$$

$$= 680x^2 + \frac{736}{x}$$

Lengden på sidene i bunnen må være positiv.

b)



c) Bestem x slik at materialkostnadene blir lavest mulig.

Jeg brukte kommandoen "Ekstremalpunkt(K, 0.1, 5)" og fant punktet B på grafen som viser at materialkostnaden blir lavest med $x = \underline{\underline{0,81 \text{ m}}}$.

Oppgave 12 (7 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Bedriften regner med at den daglige etterspørselen $x = E(p)$ er gitt ved

$$E(p) = 341 - p^2 \quad \text{for } p \in [4, 16]$$

der p er prisen i kroner per enhet.

a) Bestem inntekten I uttrykt ved p.

$$I(p) = E(p) \cdot p = (341 - p^2)p = 341p - p^3$$

b) Hvilken pris gir høyest inntekt?

CAS	
1	I(p):=341p-p^3 $\rightarrow$ $I(p) := -p^3 + 341\,p$
2	I'(p)=0 NLøs: $\{p = -10.66, p = 10.66\}$
3	I''(10.66) $\approx$ -63.96

Utregningen viser at en pris per enhet på 10,66 kroner gir maksimal inntekt.

De daglige kostnadene ved å produsere og selge x enheter er $K(x)$ kroner. Tabellen nedenfor viser kostnadene for noen x-verdier.

x	50	100	150	200	250	300
$K(x)$	792	1065	1329	1601	1867	2136

c) Bruk blant annet tallene i tabellen til å vise at en god modell for overskuddsfunksjonen er gitt ved

$$O(p) = -p^3 + 5{,}37p^2 + 341p - 2356$$

Jeg foretok regresjonsanalyse og fikk et funksjonsuttrykk for *K*.

B	C
50	792
100	1065
150	1329
200	1601
250	1867
300	2136

Regresjonsmodell

Lineær $y = 5.37\,x + 525.2$

CAS

1	K(x):=5.37x+525.2 ≈ $K(x) := 5.37\,x + 525.2$
2	ByttUt(K, x, 341-p^2) ≈ $-5.37\,p^2 + 2356.37$
3	A(p):=-5.37 p² + 2356.37 ≈ $A(p) := -5.37\,p^2 + 2356.37$
4	I(p):=-p^3+341p ≈ $I(p) := -p^3 + 341\,p$
5	O(p):=I(p)-A(p) ≈ $O(p) := -p^3 + 5.37\,p^2 + 341\,p - 2356.37$

d) Bestem den prisen som gir størst overskudd.
Hvor mange enheter må bedriften produsere da?

6	O'(p)=0 NLøs: $\{p = -9.02, p = 12.6$
7	O''(12.6) ≈ -64.86

Vi får størst overskudd med en pris på 12,6 kroner per enhet.

8	E(p):=341-p^2 → $E(p) := -p^2 + 341$
9	E(12.6) ≈ 182.24

Bedriften må da produsere 182 enheter.

Oppgave 13 (6 poeng)

En bedrift produserer en vare. Bedriften selger alt den produserer. Overskuddet O ved salg av x enheter per uke er gitt ved

$$O(x) = ax^2 + bx + c$$

- Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.
- Overskuddet er størst når bedriften selger 475 enheter.
- Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.

a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet

$$\begin{aligned} 40000a + 200b + c &= 0 \\ 950a + b &= 0 \\ 1200a + b &= -5 \end{aligned}$$

$$O(200) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{40000a + 200b + c = 0}$$

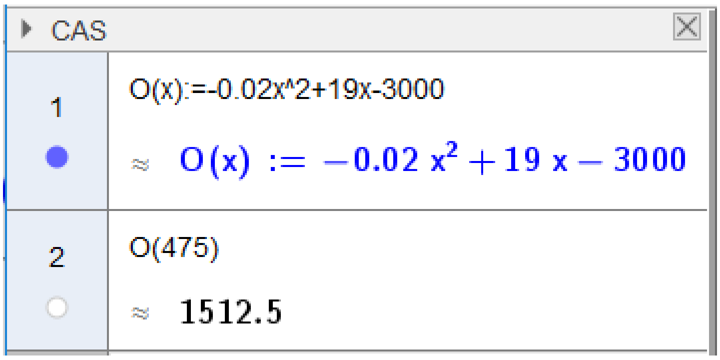
$$O'(475) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a \cdot 475 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{950a + b = 0}$$

$$O'(600) = I'(600) - K'(600) = -5 \quad \Rightarrow \quad 2a \cdot 600 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{1200a + b = -5}$$

b) Bruk CAS til å bestemme a, b og c.

CAS	
1	40000a+200b+c=0 ≈ $40000\,a + 200\,b + c = 0$
2	950a+b=0 ≈ $950\,a + b = 0$
3	1200a+b=-5 ≈ $1200\,a + b = -5$
4	{$1, $2, $3} NLøs: $\{a = -0.02, b = 19, c = -3000\}$

c) Hva er det største overskuddet bedriften kan få per uke?
Størst overskudd når det selges 475 enheter per uke.



Oppgave 4 (8 poeng)

I et område er det brutt ut en smittsom sykdom. Antall personer som blir smittet per uke, kan modelleres med en logistisk funksjon g der

$$g(t)=\frac{N}{1+ae^{-kt}}$$

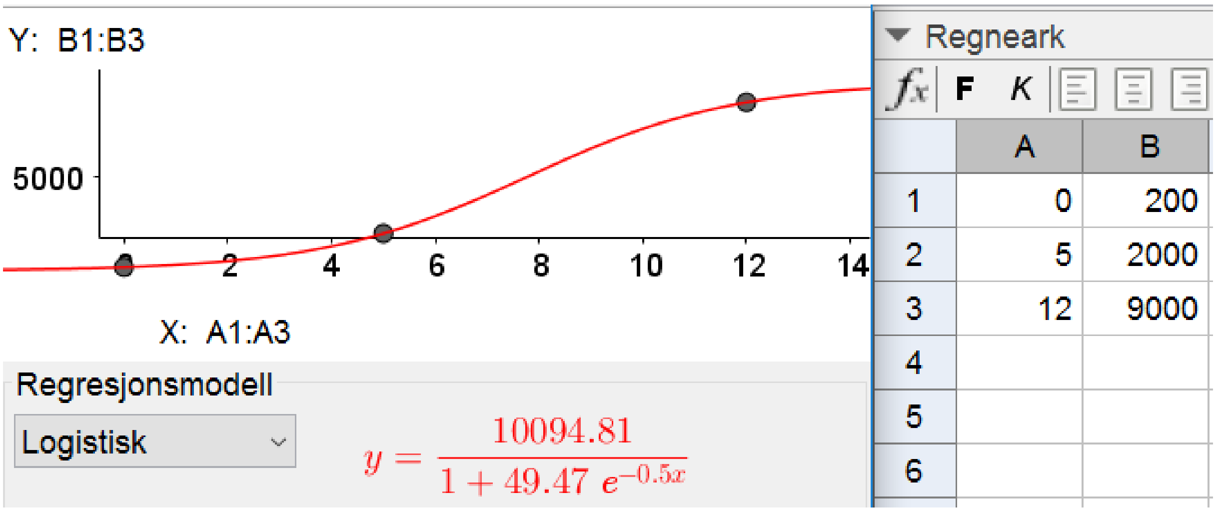
Her er N, a og k reelle tall, og $g(t)$ er antall personer som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

Tabellen nedenfor viser $g(t)$ for noen verdier av t.

t	0	5	12
$g(t)$	200	2000	9 000

a) Bruk regresjon til å bestemme N, a og k i uttrykket $g(t)$.

Jeg velger logistisk regresjonsmodell



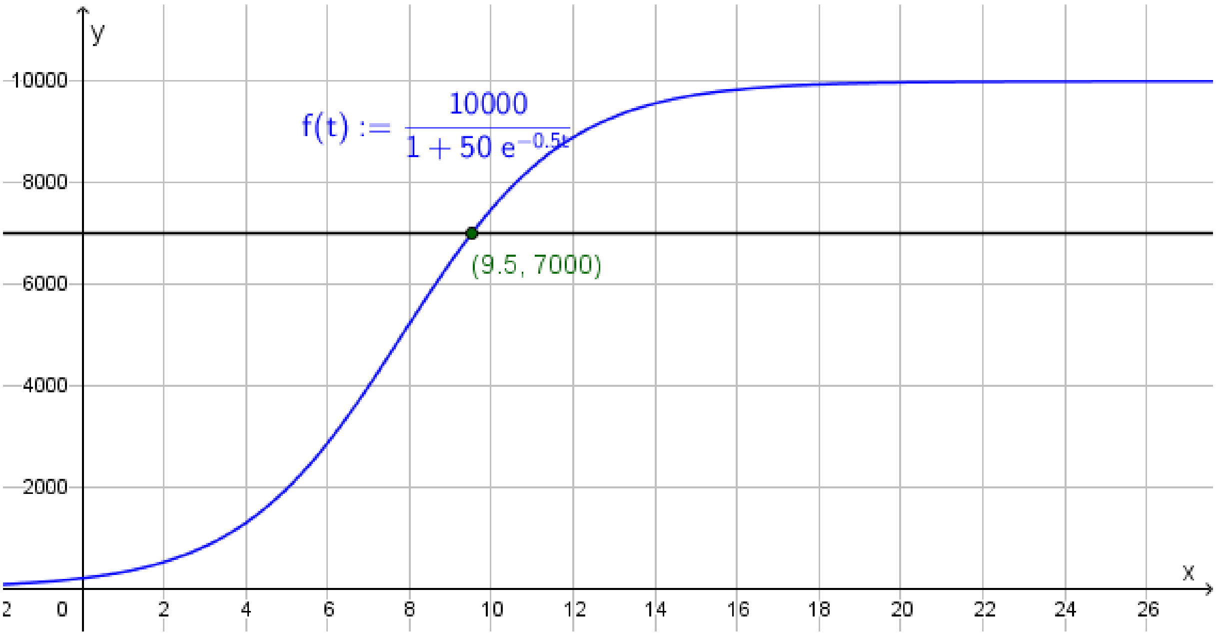
og får $\underline{\underline{N=10095}}$, $\underline{\underline{a=49,5}}$ og $\underline{\underline{k=0,5}}$

Nærmere undersøkelser viser at

$$f(t)=\frac{10000}{1+50e^{-0.5t}}$$

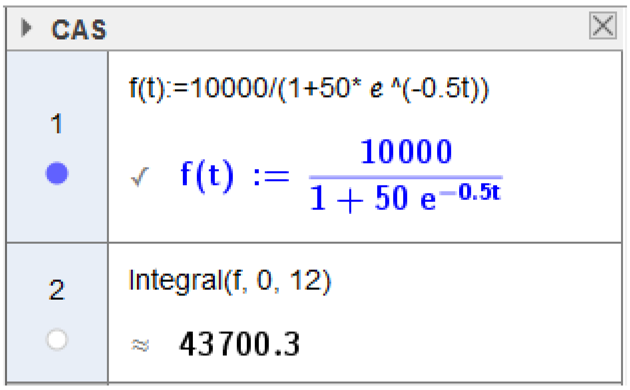
er en god modell for antallet som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til f. Bruk grafen til å bestemme når antall smittede personer per uke er 7000.



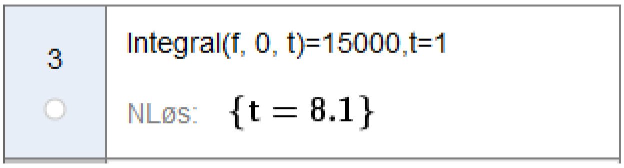
9,5 uker etter at sykdommen brøt ut, er antall smittede personer per uke 7 000.

c) Bruk CAS til å bestemme $\int_0^{12} f(t)\,dt$. Hva forteller dette svaret oss?



Samlet antall smittede personer de 12 første ukene er 43 700.

d) Hvor mange uker vil det gå før antall personer som er smittet, overstiger 15 000?



Det vil gå litt over 8 uker før samlet antall smittede overstiger 15 000.