S2 – oppgaver derivasjon og funksjonsdrøfting

Oppgave 1

Deriver funksjonene

a) $f(x)=x^3+2x$

$f'(x)=\underline{\underline{3x^2+2}}$

b) $g(x)=3\cdot e^{2x-1}$

$g'(x)=3\cdot e^{2x-1}\cdot 2=\underline{\underline{6\cdot e^{2x-1}}}$

c) $h(x)=x^2\cdot e^x$

$h'(x)=\underline{\underline{2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x}}=\underline{\underline{x\cdot e^x(2+x)}}$

d) $f(x)=e^{-2x}$

$f'(x)=e^{-2x}\cdot(-2)=\underline{\underline{-2e^{-2x}}}$

e) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

$$g'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

f) $h(x)=(3x+1)\cdot e^x+2$

$h'(x)=3\cdot e^x+(3x+1)e^x=e^x(3+(3x+1))=\underline{\underline{e^x(3x+4)}}$

g) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

$$f'(x)=(3x^{-2})'=3\cdot(-2)\cdot x^{-3}=\underline{\underline{-\frac{6}{x^3}}}$$

h) $g(x)=x\cdot e^{-4x}$

$g'(x)=1\cdot e^{-4x}+x\cdot e^{-4x}\cdot(-4)=\underline{\underline{e^{-4x}(1-4x)}}$

Oppgave 2

Deriver funksjonene

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x)=\left(x^{-2}\right)'=-2\cdot x^{-3}=\underline{\underline{-\dfrac{2}{x^3}}}$

b) $g(x)=5(x-1)^5$

$g'(x)=5\cdot 5(x-1)^4\cdot 1=\underline{\underline{25(x-1)^4}}$

c) $h(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x-3}$

$h'(x)=\dfrac{e^{-2x}\cdot(-2)\cdot(x-3)-e^{-2x}\cdot 1}{(x-3)^2}=\underline{\underline{\dfrac{e^{-2x}(5-2x)}{(x-3)^2}}}$

d) $f(x)=3\ln(x+2)$

$f'(x)=3\cdot\dfrac{1}{x+2}\cdot 1=\underline{\underline{\dfrac{3}{x+2}}}$

e) $g(x)=x\cdot\ln(3x)$

$g'(x)=1\cdot\ln(3x)+\cancel{x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{3}\cancel{x}}\cdot\cancel{3}=\underline{\underline{\ln(3x)+1}}$

f) $g(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$

$g'(x)=\dfrac{(3x-2)'\cdot x^3-(3x-2)\cdot\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\dfrac{3\cdot x^3-(3x-2)\cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\dfrac{3\cdot x^3-9x^3+6x^2}{x^6}$

$=\dfrac{6x^2-6x^3}{x^6}=\dfrac{6x^2(1-x)}{x^6}=\underline{\underline{\dfrac{6(1-x)}{x^4}}}$

g) $h(x)=\ln(x^3-x)$

$$h(x)=\ln(x^3-x) \qquad u=x^3-x$$

$$h'(x)=\frac{1}{u}\cdot u' \qquad h(u)=\ln(u)$$

$$=\underline{\underline{\frac{3x^2-1}{x^3-x}}}$$

Oppgave 3

Deriver funksjonene

a) $k(x)=x^3e^{-x^2}$

$$k'(x)=(x^3)'\cdot e^{-x^2}+x^3\cdot\left(e^{-x^2}\right)'$$

$$=3x^2\cdot e^{-x^2}+x^3\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$=\underline{\underline{3x^2\cdot e^{-x^2}-2x^4\cdot e^{-x^2}}}$$

$$=\underline{\underline{x^2\cdot e^{-x^2}(3-2x^2)}}$$

b) $f(x)=x\cdot e^{2x}$

$$f'(x)=x'\cdot e^{2x}+x\cdot\left(e^{2x}\right)'$$

$$=1\cdot e^{2x}+x\cdot e^{2x}\cdot 2$$

$$\underline{\underline{=e^{2x}(1+2x)}}$$

c)

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-3}$$

$$g'(x)=\frac{(x-1)'\cdot(x^2-3)-(x-1)\cdot(x^2-3)'}{(x^2-3)^2}$$

$$=\frac{1\cdot(x^2-3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2-3)^2}$$

$$=\frac{x^2-3-2x^2+2x}{(x^2-3)^2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{-x^2+2x-3}{(x^2-3)^2}}}$$

d) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+4$

$f'(x)=\underline{\underline{2x+\frac{1}{2}}}$

e) $g(x)=3e^{2x}$

$g'(x)=3e^{2x}\cdot 2=\underline{\underline{6e^{2x}}}$

f) $h(x)=x\cdot e^{2x}$

$h'(x)=1\cdot e^{2x}+x\cdot e^{2x}\cdot 2$

$h'(x)=\underline{\underline{e^{2x}(1+2x)}}$

g) $i(x)=\ln(x^2+4)$

$i'(x)=\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x=\underline{\underline{\frac{2x}{x^2+4}}}$

h) $f(x)=x^3+2x+3$

$f'(x)=\underline{\underline{3x^2+2}}$

i) $g(x)=2x^2\cdot e^{2x}$

$g'(x)=4x\cdot e^{2x}+2x^2\cdot e^{2x}\cdot 2$

$g'(x)=\underline{\underline{4x\cdot e^{2x}+4x^2\cdot e^{2x}}}$

$g'(x)=\underline{\underline{4x\cdot e^{2x}(1+x)}}$

j) $h(x)=3x\cdot\ln(2x)$

$h'(x)=3\cdot\ln(2x)+3x\cdot\frac{2}{2x}$

$h'(x)=\underline{\underline{3\cdot\ln(2x)+3}}$

$h'(x)=\underline{\underline{3(\ln(2x)+1)}}$

Oppgave 4

For en funksjon f har vi gitt at $f'(x)=a(x+1)(x-2)$ der $a<0$

a) Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$. Bruk denne til å bestemme x-verdien til topp- og bunnpunkt på grafen til f. Bestem også hvor grafen til f stiger og synker.

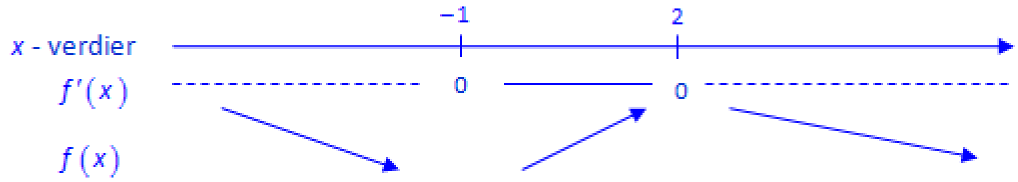
$f'(x)=0$ når $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ eller når $x-2=0 \Rightarrow x=2$

Når $x<-1$ er $(x+1)$ negativ og $(x-2)$ negativ. Siden $a<0$, blir $f'(x)$ negativ.

Når $-1<x<2$ er $(x+1)$ positiv og $(x-2)$ negativ. Siden $a<0$, blir $f'(x)$ positiv.

Når $x>2$ er $(x+1)$ positiv og $(x-2)$ positiv. Siden $a<0$, blir $f'(x)$ negativ.

Vi får fortegnslinjen



Fortegnslinjen viser at grafen til f har toppunkt for $x=\underline{\underline{2}}$ og bunnpunkt for $x=\underline{\underline{-1}}$

Grafen til f stiger når $x \in \underline{\underline{\langle -1,2 \rangle}}$

Grafen til f synker når $x \in \underline{\underline{\langle \leftarrow,-1 \rangle \cup \langle 2,\rightarrow \rangle}}$

b) Bestem $f''(x)$. Bruk denne til å bestemme x-verdien til vendepunktet.

$f'(x)=a(x+1)(x-2)$

$f''(x)=a\cdot(1\cdot(x-2)+(x+1)\cdot 1)$

$f''(x)=a\cdot(x-2+x+1)$

$f''(x)=a\cdot(2x-1)$

$f''(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\underline{\frac{1}{2}}$

Grafen til f har vendepunkt for $x=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Oppgave 5

Gitt funksjonen

$f(x)=4x^3-6x^2\,, \qquad x\in\langle -1,2\rangle$

a) Løs likningen $f(x)=0$

$$\begin{aligned} f(x)&=0\\ 4x^3-6x^2&=0\\ 2x^2(2x-3)&=0\\ 2x^2=0 \quad &\vee \quad 2x-3=0\\ x=\underline{\underline{0}} \quad &\vee \quad x=\underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

b) Bestem $f'(x)$, og tegn fortegnslinjen til den deriverte.

$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

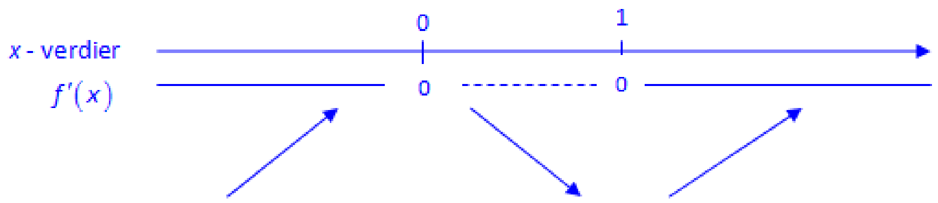
$f'(x)=0 \Rightarrow 12x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1$

$f'(-1)=12\cdot(-1)(-1-1)=24>0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3<0$

$f'(2)=12\cdot(2)(2-1)=24>0$

Jeg kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



c) Bruk fortegnslinjen i 2) til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Fortegnslinjen viser at grafen har et toppunkt for $x=\underline{0}$

$f(0)=4\cdot 0^3-6\cdot 0^2=\underline{0}$

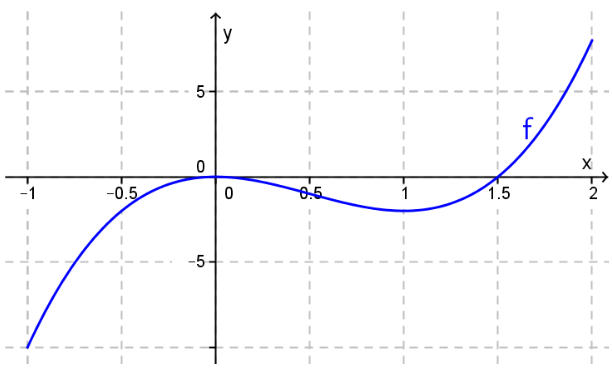
Toppunkt $\underline{\underline{(0,0)}}$

Fortegnslinjen viser at grafen har et bunnpunkt for $x=\underline{1}$

$f(1)=4\cdot 1^3-6\cdot 1^2=\underline{-2}$

Bunnpunkt $\underline{\underline{(1,-2)}}$

d) Tegn en skisse av grafen til f.



Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

a) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3(x-1)(x-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \lor x = 3$$

$$f'(0) = 3(0-1)(0-3) = 9$$

$$f'(2) = 3(2-1)(2-3) = -3$$

$$f'(4) = 3(4-1)(4-3) = 9$$

Regningen viser at grafen stiger når x er mindre enn 1, grafen synker mellom 1 og 3, og grafen stiger for x-verdier større enn 3. Siden også den deriverte er null for $x = 1$ og $x = 3$, så betyr det at grafen har et toppunkt for $x = \underline{\underline{1}}$ og et bunnpunkt for $x = \underline{\underline{3}}$.

Funksjonsverdien i toppunktet er $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{5}}$

Funksjonsverdien i bunnpunktet er $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = \underline{\underline{1}}$

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til f.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

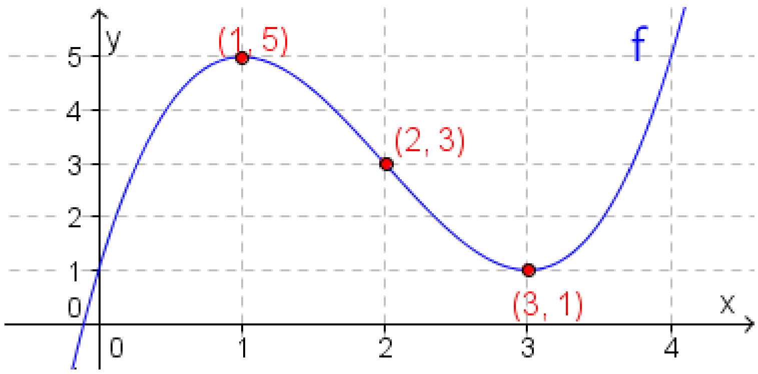
$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6x - 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2$$

Dette betyr at grafen har ett vendepunkt, for $x = \underline{\underline{2}}$

Funksjonsverdien til vendepunktet er $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 7

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1 \qquad , \qquad D_f=\mathbb{R}$$

a) Bestem eventuelle topp- eler bunnpunkter på grafen til f.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$$
$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x=2$$
$$f'(-1)=-1(-1-2)=3$$
$$f'(1)=1(1-2)=-1$$
$$f'(3)=3(3-2)=3$$

Regningen viser at grafen stiger når x er mindre enn 0, grafen synker mellom 0 og 2, og grafen stiger for x-verdier større enn 2. Siden også den deriverte er null for $x=0$ og $x=2$, så betyr det at grafen har et toppunkt for $\underline{\underline{x=0}}$ og et bunnpunkt for $\underline{\underline{x=2}}$.

Funksjonsverdien i toppunktet er $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-0^2+1=\underline{\underline{1}}$

Funksjonsverdien i bunnpunktet er $f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2+1=\frac{8}{3}-4+1=\frac{8}{3}-\frac{12}{3}+\frac{3}{3}=\underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$

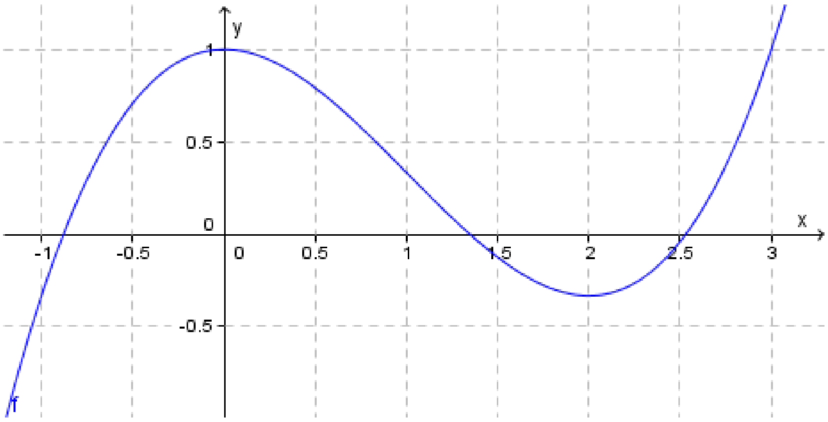
b) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f.

$$f'(x)=x^2-2x$$
$$f''(x)=2x-2$$
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

Dette betyr at grafen har ett vendepunkt, for $\underline{\underline{x=1}}$

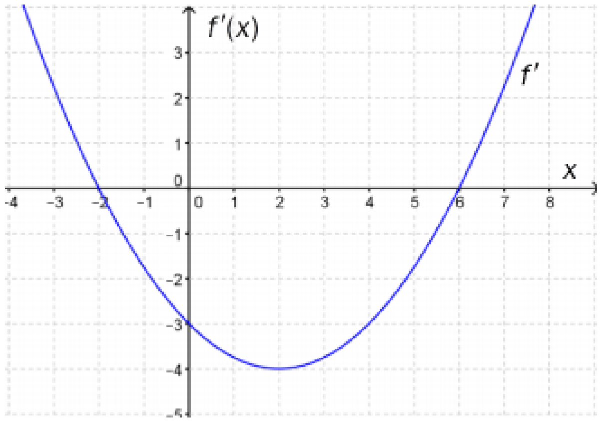
Funksjonsverdien til vendepunktet er $f(1)=\frac{1}{3}1^3-1^2+1=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 8

Til høyre ser du grafen til den deriverte av en funksjon f.

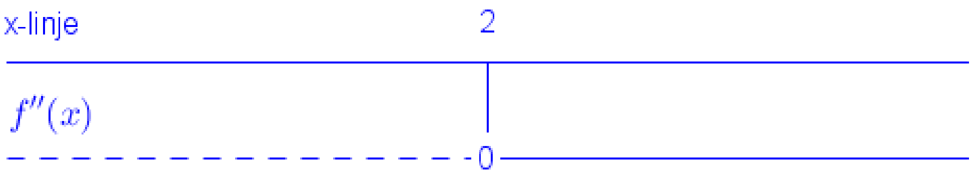


a) Bruk grafen til å bestemme x – koordinaten til eventuelle topp- eler bunnpunkt på grafen til f.
Avgjør hvor grafen til f vokser og hvor den minker.
Den deriverte er positiv for $x<-2$, null for $x=-2$, negativ for $-2<x<6$, null for $x=6$ og positiv for $x>6$. Det viser at grafen til f vokser for $x<-2$, har toppunkt for $x=-2$, avtar for $-2<x<6$, har bunnpunkt for $x=6$ og vokser for $x>6$.

b) Punktet $(4,3)$ ligger på grafen til f. Bestem likningen til tangenten i dette punktet-
Siden punktet $(4,3)$ ligger på grafen til f, er $f(4)=3$. Avlesning på grafen til den deriverte gir $f'(4)=-3$. Likningen til tangenten i punktet $(4,3)$ blir

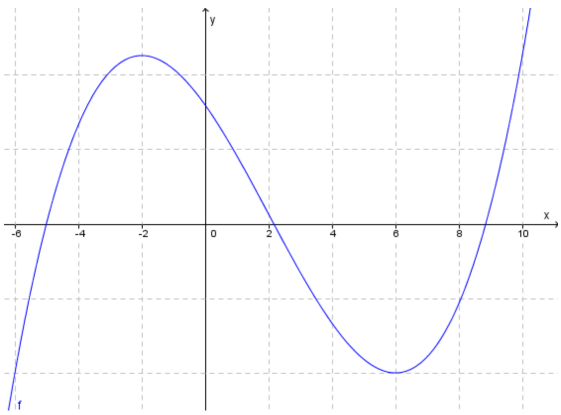
$$
\begin{aligned}
y-f(4)&=f'(4)(x-4)\\
y-3&=-3(x-4)\\
y&=-3x+12+3\\
y&=-3x+15
\end{aligned}
$$

c) Tegn fortegnslinja til $f''(x)$. Bruk denne til å bestemme x – koordinaten til vendepunktet på grafen til f.
Når den deriverte avtar, er den dobbeltderiverte negativ. Når den deriverte vokser, er den dobbeltderiverte positiv. Når den deriverte har bunnpunkt, er den dobbeltderiverte null.



Grafen til f har vendepunkt når den dobbeltderiverte er lik null, det vil si for $x=\underline{\underline{2}}$.

d) Lag en mulig skisse av grafen til f.



Oppgave 9

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x \qquad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

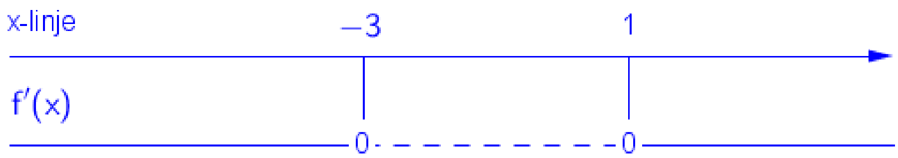
a) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen til f.

I eventuelle topp- og bunnpunkt er den deriverte lik null.

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$
$$x = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Det betyr at $f'(x) = (x-1)(x+3)$

Jeg lager fortegnslinje



Grafen stiger når $x < -3$, grafen synker for $-3 < x < 1$ og grafen stiger for $x > 1$

Grafen har toppunkt i $(-3, f(-3)) = \left(-3, (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3)\right) = \underline{\underline{(-3, 27)}}$

Grafen har bunnpunkt i $(1, f(1)) = \left(1, 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1\right) = \underline{\underline{(1, -5)}}$

b) Bestem eventuelle vendepunktet på grafen til f.

Vi løser likningen $f'(x) = 0$

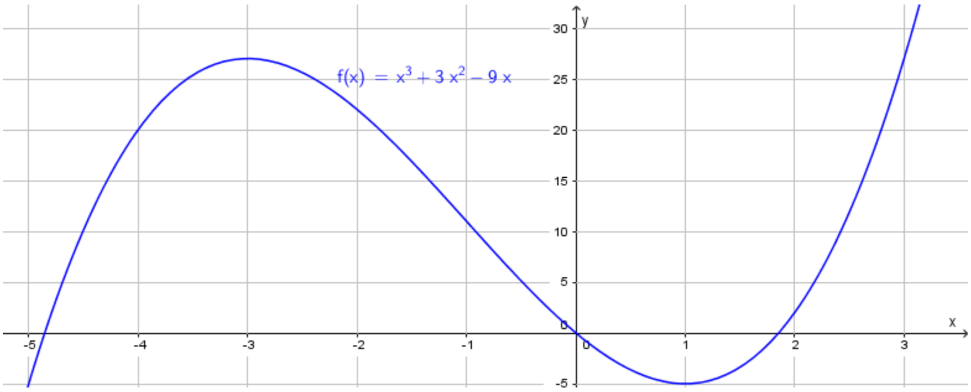
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \qquad \Rightarrow \qquad f''(x) = 6x + 6$$
$$f''(x) = 0$$
$$6x + 6 = 0$$
$$6x = -6$$
$$x = -1$$

Vi har at $f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6$ og $f''(2) = 6 \cdot (2) + 6 = 18$

Dette viser at vi har et vendepunktet med koordinater

$(-1, f(-1)) = \left(-1, (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1)\right) = \underline{\underline{(-1, 11)}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 10

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem ved regning nullpunktene til f.

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \vee \quad x = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} \quad \vee \quad x = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \quad \vee \quad x = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 0$$

Nullpunktene til f er $x = \underline{\underline{0}}$ og $x = \underline{\underline{3}}$

b) Bestem ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

I eventuelle topp- og bunnpunkter er den deriverte lik null.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6}$$

$$x = \frac{12 + 6}{6} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{12 - 6}{6} = 1$$

Det betyr at $f'(x)=(x-1)(x-3)$

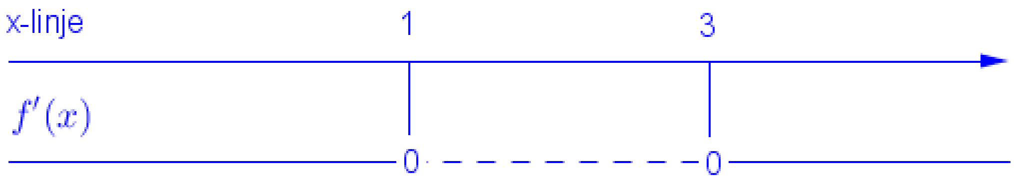
Jeg tar stikkprøver for å finne fortegnet til den deriverte i aktuelle intervall.

$f'(0)=(0-1)(0-3)$ positivt

$f'(2)=(2-1)(2-3)$ negativt

$f'(4)=(4-1)(4-3)$ positivt

Jeg lager fortegnslinje



Grafen stiger når $x<1$, grafen synker for $1<x<3$ og grafen stiger for $x>3$

Grafen har toppunkt i $(1, f(1))=(1, 1^3-6\cdot1^2+9\cdot1)=\underline{\underline{(1,4)}}$

Grafen har bunnpunkt i $(3, f(3))=(3, 3^3-6\cdot3^2+9\cdot3)=(3, 27-54+27)=\underline{\underline{(3,0)}}$

c) Bestem ved regning vendepunktet på grafen til f.

I vendepunktet er den dobbeltderiverte lik null.

$$f'(x)=3x^2-12x+9 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=6x-12$$

$$f''(x)=0$$

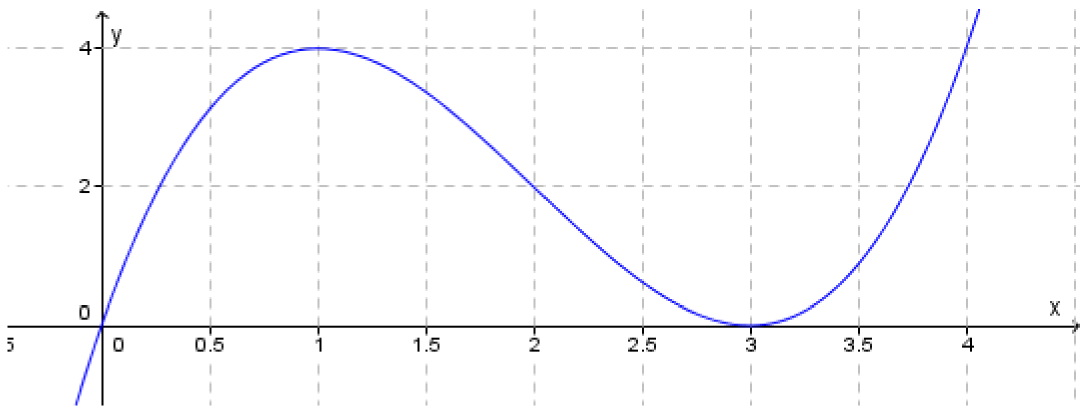
$$6x-12=0$$

$$6x=12$$

$$x=2$$

Vendepunktet har koordinater $(2, f(2))=(2, 2^3-6\cdot2^2+9\cdot2)=(2, 8-24+18)=\underline{\underline{(2,2)}}$

d) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 11

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3+6x^2+9x+4 \quad , \qquad D_f=\mathbb{R} \; .$$

a) Vis at $x=-1$ er et nullpunkt til f. Bestem eventuelt andre nullpunkter.

Siden $f(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+4=-1+6-9+4=5-5=0$, er $x=-1$ et nullpunkt til f. Jeg foretar polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
(x^3+6x^2+9x+4):(x+1)=x^2+5x+4 \\
\underline{-(x^3+x^2)} \\
\quad 5x^2+9x+4 \\
\quad \underline{-(5x^2+5x)} \\
\qquad 4x+4 \\
\qquad \underline{-(4x+4)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Jeg setter så $x^2+5x+4=0$. Det gir to andre nullpunkter

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm3}{2}$$

$$x=\underline{\underline{-1}} \quad \vee \qquad x=\underline{\underline{-4}}$$

b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

I eventuelle topp- og bunnpunkter er den deriverte lik null.

$$f'(x)=0$$

$$3x^2+12x+9=0$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot3\cdot9}}{2\cdot3}$$

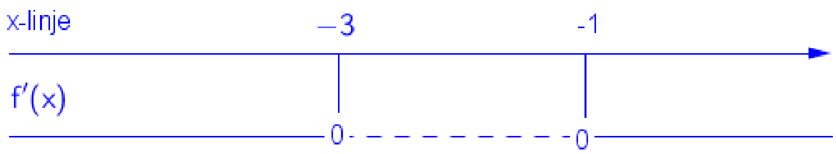
$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144-108}}{6}$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{36}}{6}$$

$$x=\frac{-12+6}{6}=-1 \vee \qquad x=\frac{-12-6}{6}=-3$$

Det betyr at $f'(x)=(x+1)(x+3)$.

Jeg lager fortegnslinje



Grafen stiger når $x<-3$, grafen synker for $-3<x<-1$ og grafen stiger for $x>-1$.

Grafen har toppunkt i $\left(-3, f(-3)\right)=\left(-3,(-3)^3+6\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+4\right)=\underline{\underline{(-3,4)}}$.

Grafen har bunnpunkt i $\left(-1, f(-1)\right)=\left(-1,(-1)^3-6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+4\right)=\underline{\underline{(-1,0)}}$.

c) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f.

I vendepunktet er den dobbeltderiverte lik null.

$$f'(x)=3x^2+12x+9 \qquad \Rightarrow \qquad f''(x)=6x+12$$

$$f''(x)=0$$

$$6x+12=0$$

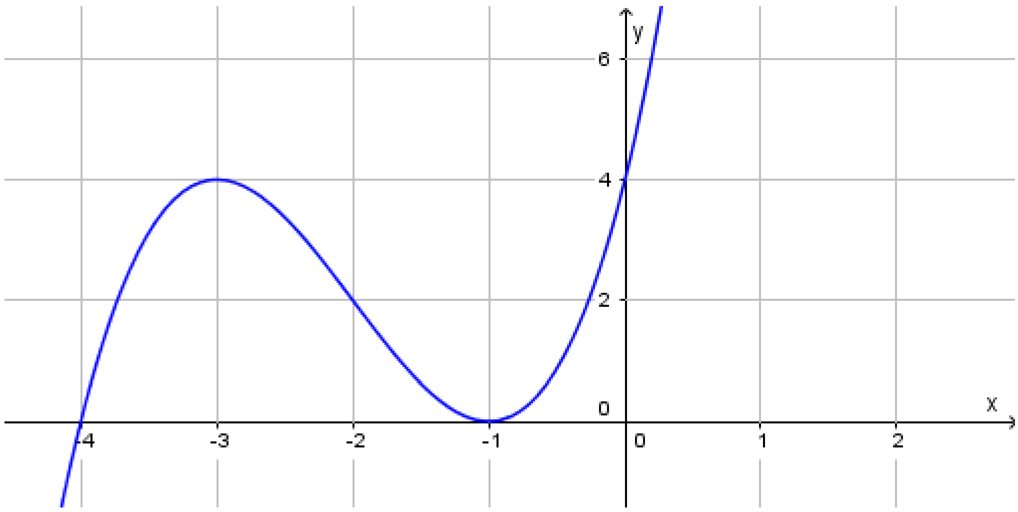
$$6x=-12$$

$$x=-2$$

Vendepunktet har koordinater

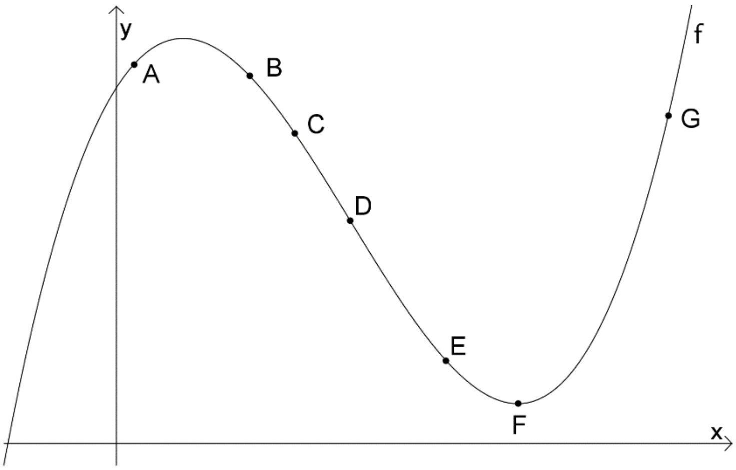
$$\left(-2, f(-2)\right)=\left(-2,(-2)^3+6\cdot(-2)^2+9\cdot(-2)+4\right)=(-2,-8+24-18+4)=\underline{\underline{(-2,2)}}.$$

d) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 12

Grafen til tredjegradsfunksjonen f er tegnet nedenfor.



Bestem i hvilke av punktene A, B, C, D, E, F og G **begge** disse betingelsene er oppfylt:

$$f'(x) < 0 \text{ og } f''(x) < 0$$

Begrunn svaret ditt.

- Punkt A: Grafen stiger og vender sin hule side ned. Da er $f'(x) > 0$ og $f''(x) < 0$
- Punkt B: Grafen synker og vender sin hule side ned. Da er $f'(x) < 0$ og $f''(x) < 0$
- Punkt C: Grafen synker og vender sin hule side ned. Da er $f'(x) < 0$ og $f''(x) < 0$
- Punkt D: Grafen synker og har vendepunkt her. Da er $f'(x) < 0$ og $f''(x) = 0$
- Punkt E: Grafen synker og vender sin hule side opp. Da er $f'(x) < 0$ og $f''(x) > 0$
- Punkt F: Grafen har bunnpunkt og vender sin hule side opp. Da er $f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$
- Punkt G: Grafen stiger og vender sin hule side opp. Da er $f'(x) > 0$ og $f''(x) > 0$

Begge betingelsene er oppfylt i punktene B og C.