S2 – oppgaver algebra – rekker

Oppgave 1 (4 poeng)

a) Bestem summen av den aritmetiske rekken $3+6+\cdots+300$

b) Bestem a_2 slik at rekken $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ blir aritmetisk når $a_1=4$ og $a_n=a_{n-2}+8, \quad n\geq 3$

Oppgave 2 (3 poeng)

a) Bestem et uttrykk for summen $a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\cdots+\frac{a}{2^{n-1}}$

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\cdots$

b) Begrunn hvorfor rekken konvergerer.

c) Bestem a slik at summen av rekken blir 10.

Oppgave 3 (4 poeng)

I en aritmetisk rekke er $a_2=6$ og $a_5=18$

a) Skriv opp de fire første leddene i rekken.

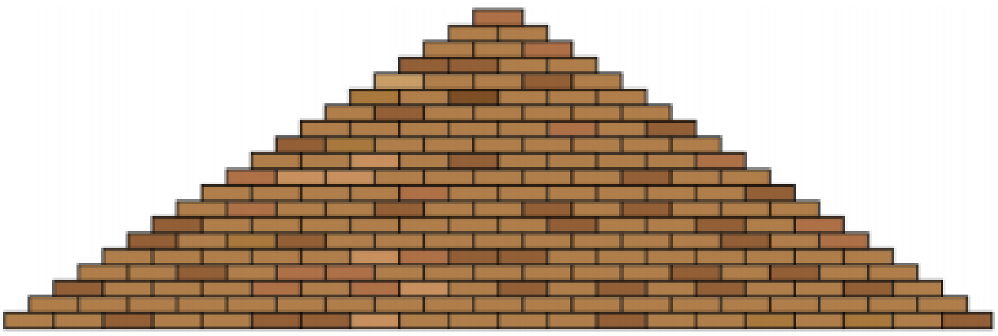
b) Bestem en formel for a_n

c) Bestem en formel for summen $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

Oppgave 4 (3 poeng)

a) Forklar hva det vil si at en rekke $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ er aritmetisk.

b) En murer skal lage en vegg slik figuren viser. Bruk teori om rekker til å bestemme hvor mange murstein mureren trenger, når han vet at det er totalt 20 rader med murstein.



Oppgave 5 (4 poeng)

Tallet $x = 0,555\ldots$ består av uendelig mange 5-tall etter komma.

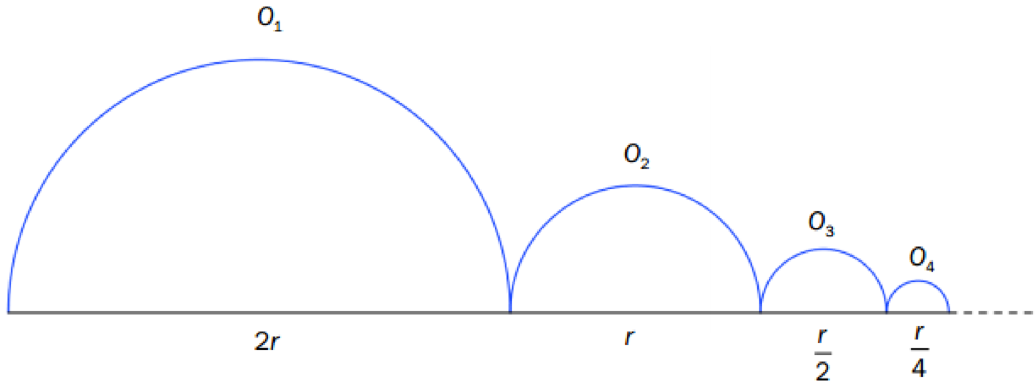
a) Forklar at vi kan se på dette tallet som summen av den uendelige geometriske rekken
$$\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\ldots.$$
Bruk dette til å skrive x som en brøk.

b) Tallet $y = 0,232323\ldots$ kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk dette til å skrive y som en brøk.

Oppgave 6 (3 poeng)

Langs en linje har vi konstruert en rekke halvsirkler som vist på figuren nedenfor. Diameteren til den første halvsirkelen er $2r$. Videre er diameteren til den neste halvsirkelen halvparten av diameteren til den foregående.

Vi lar O_n være lengden av halvsirkelbue nummer n



a) Forklar at $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ blir en uendelig, geometrisk rekke.

b) Bestem summen av rekken i oppgave a). Kommenter svaret.

Oppgave 7 (3 poeng)

En type tablett inneholder 60 mg av et bestemt stoff. Når en pasient har dette stoffet i kroppen, vil mengden av stoffet bli halvert i løpet av 6 timer.

En pasient får én tablett hver tolvte time.
Hvor mange milligram av stoffet vil maksimalt samles i kroppen etter lang tids bruk?

Oppgave 8 (3 poeng)

En rekke er gitt ved $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen S_n av rekken.

b) Bestem summen av den uendelige rekken $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$.

Oppgave 9 (3 poeng)

a) Forklar hva vi mener med at en rekke er aritmetisk.

b) I en aritmetisk rekke er $a_1=3$ og $a_4=12$

Bestem a_n og S_n.

Oppgave 10 (4 poeng)

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved $a_n=n^3+1$

a) Skriv opp de fire første leddene i tallfølgen.

b) Vis at leddene a_1, a_2, a_3 og a_4 er delelige med henholdsvis 2, 3, 4 og 5.

c) Vis at a_n er delelig med $n+1$

Oppgave 11 (3 poeng)

I en aritmetisk rekke er $a_2=6$ og $a_5=18$

a) Skriv opp de fire første leddene i rekken.

b) Bestem en formel for a_n

c) Bestem en formel for summen $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

Oppgave 12 (2 poeng)

Det n-te leddet i en geometrisk rekke er gitt ved

$$a_n=11\cdot(-0{,}1)^{n-1}$$

Forklar at rekken er konvergent. Hva blir summen?

Oppgave 13 (4 poeng)

Vi har gitt rekkene

1) $2+4+6+8+10+\cdots$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_{10}

2) $2+5+8+\cdots+89$ Bruk formler og bestem summen av rekken.

3) $1+2+4+8+\cdots$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_8

4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ Bestem summen av den uendelige rekken.

Oppgave 14 (4 poeng)

Tall som kan skrives på formen $T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$, kalles for trekanttall.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene.

Vi organiserer oddetallene i en talltrekant slik tabellen nedenfor viser.

n	a_n	a_n	a_n	S_n	S_n
1	1	1		1	
2	$3+5$	8		9	3^2
3	$7+9+11$	27	3^3	36	
4	$13+15+17+19$			100	
5	$21+23+25+27+29$				15^2

b) Skriv av og fyll ut tabellen
Bruk mønsteret som framkommer, til å finne en formel for a_n.

c) Bruk mønsteret til å forklare at vi kan skrive
$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

Oppgave 15

a) Vi har gitt rekken

$$4+7+10+13+\cdots$$

Bestem a_n og S_n

b) Løs likningen

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=3 \qquad \text{når } x\in\langle -1,1\rangle$$

Oppgave 16

I en aritmetisk tallfølge er $a_4=9$ og $a_{10}=21$.
Bestem a_{15}.

Oppgave 17

Trekanttallene er gitt ved formelen $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, der n er et naturlig tall.

a) Skriv opp de ti første trekanttallene.

Inge påstår at summen av to «nabo-trekanttall» alltid er lik et kvadrattall.

b) Finn ut om dette gjelder for $a_{14}+a_{15}$ og for $a_{20}+a_{21}$.

c) Finn ut om a_n+a_{n+1} alltid er et kvadrattall.

Oppgave 18 (2 poeng)

En gummiball slippes fra en høyde på 10 m. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den rett opp $\frac{2}{3}$ av den forrige høyden.
Hva er den totale lengden ballen har tilbakelagt (ned og opp) fra den slippes, til den faller til ro?

Oppgave 19 (2 poeng)

Vi har rekken $1+3+5+7+...$

a) Hva slags rekke er dette? Bestem et uttrykk for det n-te leddet a_n.

b) Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene. Regn ut S_{100}.

Oppgave 20 (2 poeng)

Gitt den uendelige rekken

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$$

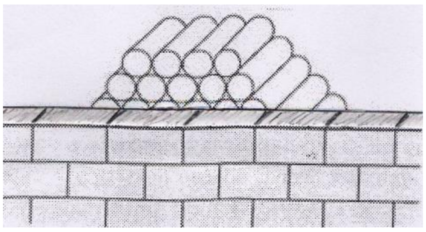
Avgjør om rekken konvergerer, og bestem eventuelt summen av rekken.

Oppgave 21

Forklar at den uendelige rekken nedenfor konvergerer. Bestem summen.

$$7+\frac{14}{9}+\frac{28}{81}+\frac{56}{729}+\dots$$

Oppgave 22 (6 poeng)



En stabel med aluminiumsrør ligger delvis skjult bak en murvegg.

a) La antall rør i rad nummer n ovenfra være a_n. Ta utgangspunkt i tegningen og forklar at

$$a_n = n+3 \quad \text{når} \quad n \geq 1$$

b) Vis at antall rør til sammen i de n øverste radene er gitt ved

$$S_n = \frac{7n+n^2}{2}$$

c) Hvor mange rader trengs for å få plass til 225 rør?
(Du kan få bruk for at $\sqrt{1849} = 43$.)

Oppgave 23 (4 poeng)

a) Gitt rekka $2+4+6+8+\ldots$
Finn ledd nummer 20 og summen av de 20 første leddene.

b) Gitt den uendelige rekka $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$
Avgjør om rekka konvergerer. Finn eventuelt summen.

Oppgave 24 (4 poeng)

Vi har en aritmetisk rekke der $a_3=8$ og $a_8=23$. Bestem a_1, d og S_{50}.

Oppgave 25 (6 poeng) (VÅR 2017)

I en aritmetisk rekke $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ er $a_1=3$ og $a_6=18$.

a) Bestem differansen d, og bestem en formel for a_n uttrykt ved n.

b) Vis at summen av de n første leddene kan skrives som

$$S_n=\frac{3}{2}n(n+1)$$

c) Hvor mange ledd må vi ha med for at summen skal bli 84?

Oppgave 26 (4 poeng) (HØST 2017)

En aritmetisk rekke er gitt ved $3+7+11+15+\cdots+119$.

a) Bestem en formel for ledd nummer n i denne rekken.

b) Bestem summen av rekken.

DEL 2

Oppgave 1 (4 poeng)

Kristin bestemmer seg for å spare penger til hun blir pensjonist. Hun ønsker å ha 2 millioner kroner på konto den dagen hun fyller 60 år. For å oppnå dette, vil hun sette inn et fast årlig beløp, første gang når hun fyller 25 år og siste gang når hun fyller 59 år. Hun regner med en årlig rente på 5 % i hele perioden.

a) Vis at hun må sette inn omtrent 21 000 kroner hvert år.

b) Den dagen Kristin fyller 60 år, vil hun ta ut 200 000 kroner. Det samme vil hun gjøre på hver av de fire neste fødselsdagene.
Hvor stort beløp har Kristin på kontoen den dagen hun fyller 65 år?

Oppgave 2 (4 poeng)

Katrine satte inn 20 000 kroner på konto hvert år, første gang 1. januar 2007 og siste gang 1. januar 2010. Innskuddsrenten var hele tiden 3,5 % per år. Alle innskuddene sto urørt.

a) Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen i banken 31. desember 2010?

b) 1. januar 2011 ble innskuddsrenten satt ned til 3,0 % per år.
Katrine satte ikke flere penger i banken, men tok i stedet ut 8 000 kroner hvert år, første gang 1. januar 2011 og siste gang 1. januar 2014.
Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen 31. desember 2014?

Oppgave 3 (6 poeng)

Frida ønsker å kjøpe en ny PC som koster 7 995 kroner. Butikken tilbyr henne å kjøpe PC-en på avbetaling. Hun må da betale 36 like store månedlige beløp. Det første skal hun betale om én måned. Den månedlige renten er 1,6 %. I tillegg må hun betale et engangsgebyr på 30 kroner.

a) Forklar at dersom terminbeløpet er x kroner, så vil

$$\frac{x}{1{,}016}+\frac{x}{1{,}016^2}+\ldots+\frac{x}{1{,}016^{36}}=8025$$

Løs denne likningen.

Frida vurderer å låne pengene i banken i stedet. Der må hun betale 289 kroner hver måned i 36 måneder. Hun må betale første beløp én måned etter at hun har tatt opp lånet.

b) Hvilken månedlig rente (i prosent) får hun i banken?

Venninnen Elise har spart 650 kroner hver måned til en slik PC. Sparekontoen har en fast månedlig rente. I dag, like etter den 12. innbetalingen, har hun 8 107 kroner på kontoen.

c) Bestem den månedlige renten (i prosent) Elise fikk i banken.

Oppgave 4 (6 poeng)

Svanhild vurderer å ta opp et annuitetslån på 600 000 kroner. Hun kan velge mellom en fast årlig rente på 3,5 % og flytende rente. Lånet har én termin per år med en nedbetalingstid på 20 år. Første innbetaling skjer om ett år.

a) Forklar hvorfor vi kan bestemme terminbeløpet ved en fast årlig rente på 3,5 % ved å løse følgende likning

$$\frac{x}{1{,}035}\left(1+\frac{1}{1{,}035}+\frac{1}{1{,}035^2}+\cdots+\frac{1}{1{,}035^{19}}\right)=600\,000$$

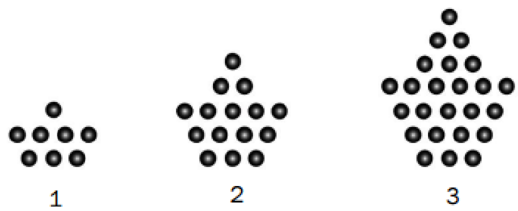
Bestem terminbeløpet ved å løse denne likningen.

b) Svanhild vurderer å be banken om å endre lånebetingelsene. Hva er den høyeste renten Svanhild kan ha dersom hun maksimalt kan betale 50 000 kroner i terminbeløp med 20 års nedbetalingstid?

c) Bankens rådgiver mener at Svanhild må kunne betale en fast årlig rente på 6,5 %. For at Svanhild skal klare en slik rente, må hun øke antall terminer. Lånet har fremdeles én termin per år. Hvor mange terminer må Svanhild betale dersom terminbeløpet skal være mindre enn 50 000 kroner med en fast årlig rente på 6,5 %?

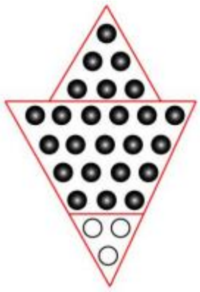
Oppgave 5 (6 poeng)

Båt-tallene B_n er antall prikker i figurene nedenfor. Vi ser at $B_1 = 8$ og $B_2 = 15$.



a) Bestem B_4

Mathias ser at han kan dele hver figur i to biter slik at han får en trekant og en del av en større trekant.



Ut fra dette ser han at $B_n = T_n + T_{n+3} - 3$, der $T_n = 1+2+3+\cdots+n$.

b) Bruk dette til å bestemme B_5.

c) Bestem en formel for B_n uttrykt ved n.

Oppgave 6 (4 poeng)

Et fond på 50 millioner kroner ble opprettet 1. januar 2015. Hensikten er å dele ut et fast beløp til gode formål den 31.12. hvert år.

Styret for fondet gikk først ut fra at den årlige avkastningen ville bli 10,0 %.

a) Hvor mye penger kan maksimalt deles ut hvert år dersom fondet aldri skal gå tomt?

b) Når vil fondet være tomt for penger dersom det deles ut 8 millioner kroner hvert år?

Oppgave 7 (6 poeng)

I starten av et år vurderer Lise å låne 100 000 kroner for å investere i et aksjefond. Lånet er et annuitetslån, og hun må betale 16 274,54 kroner i slutten av hvert år i 10 år for å nedbetale hele lånet, første gang ett år etter låneopptaket.

a) Vis at den årlige renten er på 10 %.

Banken hevder at dersom aksjene har en årlig verdiøkning på 12 %, vil hun sitte igjen med en solid fortjeneste på aksjene.

b) Bestem verdien av aksjene i slutten av det 10. året.

Hennes netto fortjeneste etter 10 år er differansen mellom verdien av det hun har betalt på lånet, og verdien av aksjene.

c) Vis at hennes netto fortjeneste etter 10 år il være 51 210, 57 kroner.

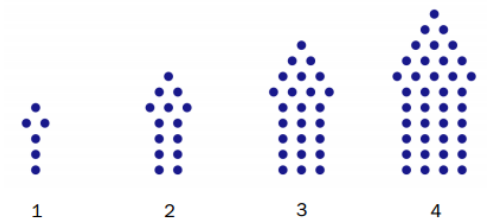
I stedet for å ta opp dette lånet for å kjøpe aksjer vurderer Lise heller å spare. I slutten av hvert år vil hun sette 16 274,54 kroner inn på en konto med en fast årlig rente. Det første beløpet setter hun inn om ett år.

d) Hva må sparerenten være for at hun skal ha like mye penger i banken om 10 år som verdien av aksjene i oppgave b)?

Oppgave 8 (6 poeng)

Antall prikker i figurene nedenfor kaller vi for piltallene P_n. Vi ser at $P_1 = 6$ og $P_2 = 14$.

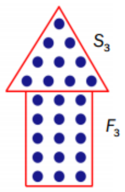
a) Skriv opp de fem første piltallene.



Maria ser at hun kan dele figurene i to slik at hun får en «pilspiss» og et «rektangel». Da er samlet antall prikker $P_n = S_n + F_n$, der S_n er antall prikker i «pilspissen» og F_n er antall prikker i «rektangelet». Figuren nedenfor viser denne oppdelingen for figur nummer 3.

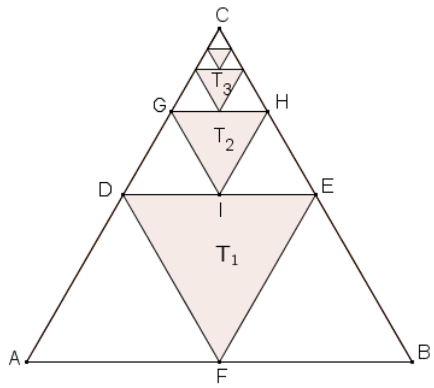
b) Forklar at antall prikker i «pilspissen på figur nummer n er gitt ved $S_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Bestem en formel for det n-te piltallet P_n.



Oppgave 9 (6 poeng)

En likesidet ΔABC har areal lik T. Midtpunktene på sidene i ΔABC er hjørnene i en ny likesidet trekant ΔDEF med areal lik T_1. Midtpunktene på sidene i ΔCDE er hjørnene i en ny likesidet ΔGHI med areal lik T_2. Etter samme metode lager vi trekanter med areal T_3, T_4, og så videre.
Denne prosessen tenker vi oss fortsetter i det uendelige. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at rekken av arealer $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \frac{T}{64} + \ldots$$

b) Vis ved regning eller ved å studere figuren at summen av rekken er lik $\frac{T}{3}$.

c) Omkretsen av ΔABC er lik 3. Trekanten som har areal lik T_n har omkrets lik O_n.
Forklar at rekken av omkretser $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$$

Bestem summen av rekken.

Oppgave 10 (8 poeng)

Line arver 100 000 kroner og vil spare pengene til en ny bil. I begynnelsen av et år setter hun dette beløpet på en konto med fast årlig rente på 4,5 %. I tillegg bestemmer hun seg for å sette 12 000 kroner inn på kontoen i begynnelsen av hvert av de neste årene.

a) Hvor mye penger står det på kontoen etter 3 år?

b) Hvor mange år må hun spare dersom det skal stå 200 000 kroner på kontoen?

c) For å få råd til «drømmebilen» må hun likevel låne 150 000 kroner til en rente på 6,0 % per år.
Hun vil bruke 5 år på å betale ned lånet. Det første avdraget betaler hun ett år etter låneopptaket.
Hvor mye må hun betale hvert år?

d) Line synes at det årlige beløpet blir altfor høyt. Hun vil betale halvparten så mye hvert år.
Hvor lang tid tar det før lånet da er nedbetalt, dersom renten fortsatt er 6,0 % per år?

Oppgave 11 (8 poeng)

For å få ungdom til å studere realfag, tenker vi oss en ny ordning for studiefinansiering.
Betingelsene er som følger:

- Lånet er rente- og avdragsfritt i studietida.

- Studenten betaler bare avdrag og ikke renter når studiene er avsluttet.
- Studenten betaler første avdrag på 15 000 kroner ett år etter at studiet er avsluttet. Deretter skal de årlige avdragene økes med 5 % hver år.

En student skal låne i alt 450 000 kroner.

a) Hvor stort blir det 2. avdraget og det 8. avdraget?

b) Hvor mye betaler studenten tilbake i alt i løpet av de 8 første avdragene?

c) Hvor mange år vil det ta før hele lånet er tilbakebetalt?

d) Hvor stort blir det siste avdraget?

Oppgave 12 (4 poeng)

Tre påfølgende kvadrattall kan alltid skrives på formen n^2, $(n+1)^2$ og $(n+2)^2$.
Med for eksempel $n=1$, får vi kvadrattallene 1, 4 og 9.

Summen av tre påfølgende kvadrattall er 365.

a) Sett opp en likning, løs denne og bestem n og de tre kvadrattallene.

Summen av to påfølgende kvadrattall er 365.

b) Bestem n og de to kvadrattallene.

Oppgave 13 (4 poeng)

Vi har gitt rekken $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

a)

1) Bestem S_{10}

2) Finn et uttrykk for S_n

b) Hvor mange ledd må vi minst ta med for at S_n skal overstige 1 000 000?

Oppgave 14 (8 poeng)

Et ungt par skal kjøpe seg leilighet. Den koster 1 500 000 kroner. De må låne hele beløpet.

Paret får tilbud om et annuitetslån til en rente på 4 % per år. De må betale 20 like store årlige beløp.
Det første beløpet skal betales ett år etter at lånet er innvilget.

a) Finn ved regning hvor stort det årlige beløpet blir?

Dette synes paret blir for dyrt. De kan maksimalt betjene et lån som har en fast årlig innbetaling på 100 000 kroner.

b) Bestem ved regning hvor mange like store årlige beløp de da må betale?

Paret synes at denne nedbetalingen tar for lang tid. De ønsker seg 20 årlige innbetalinger, og ser seg derfor om etter et bedre rentetilbud.

c) Hva må renten per år være for at de årlige beløpene ikke skal overstige 100 000 kroner?

Paret finner ikke et så godt rentetilbud som de trenger. De bestemmer seg derfor for å spare først og så låne restbeløpet, som skal nedbetales med 20 årlige innbetalinger på 100 000 kroner hver. De forutsetter at en leilighet fremdeles koster 1 500 000 kroner, og at lånerenten er 4 %.

d) Hvor stort beløp må stå på sparekontoen når paret låner restbeløpet?

Oppgave 15 (10 poeng)

En type tabletter inneholder 75 mg av et visst stoff. Når en pasient har dette stoffet i kroppen, vil mengden av stoffet bli halvert i løpet av hver sjette time.

a) En pasient tar bare en, 1, slik tablett. Hvor mange milligram av dette stoffet vil pasienten ha igjen i kroppen etter 36 timer?

b) En annen pasient får en slik tablett hver tolvte time.

1) Forklar at antall milligram av stoffet som er i pasienten etter 72 timer, like etter at den sjette tabletten er tatt, er
$75+75\cdot 0{,}25+75\cdot 0{,}25^2+75\cdot 0{,}25^3+75\cdot 0{,}25^4+75\cdot 0{,}25^5$

2) Bruk en sumformel og finn summen av denne rekken.

3) Hvor mange milligram av stoffet vil samles i kroppen i det lange løp når pasienten får en tablett hver tolvte time?

En bestemt pasient bør ikke ha en samlet mengde på mer enn 80 mg av dette stoffet i kroppen.

c) Finn ved regning hvor mange milligram av stoffet hver tablett kan inneholde dersom denne pasienten skal ta en tablett i døgnet over lang tid.

Oppgave 16 (6 poeng)

Signe bestemmer seg for å spare penger. Hun vil sette inn 30 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet skal settes inn om ett år. Renten er 4 % per år i hele spareperioden.

a) Hvor mye penger har Signe på kontoen rett etter at hun har satt inn det åttende beløpet?

b) Finn ved regning hvor lenge Signe må spare for at det skal stå 400 000 kroner på kontoen.

c) Signe ønsker å ha 400 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn det åttende beløpet. Finn ved regning hvor mye Signe i så fall må sette inn på kontoen hvert år.

Oppgave 17 **(6 poeng)**

Vi har gitt andregradsfunksjonen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000$$

a) Bestem $f'(x)$. Regn ut $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$.

b) Forklar at rekken $f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + \ldots$ er en aritmetisk rekke der første ledd er $a_1 = -2\,000$ og differansen er $d = 20$.

c) Vis at summen av de n første leddene er gitt ved uttrykket

$$S_n = 10 \cdot n^2 - 2010 \cdot n$$

I et land ble det født 100 000 barn. Etter x år er antall gjenlevende i dette kullet gitt ved modellen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000 \text{ når } x \in [0\,,\,100]$$

d) Regn ut $S_{100} = f'(0) + f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(99)$.
Tolk svaret du kommer fram til.

Oppgave 18 **(8 poeng)**

Det *n*-te leddet i en rekke er gitt ved

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

a) Skriv de fire første leddene i rekken. Vis at rekken er geometrisk, og finn kvotienten k.

b) Bestem ved regning hvor mange ledd du minst må ta med i rekken for at $S_n > 0{,}999$.

c) Avgjør om rekken konvergerer. Finn eventuelt summen.

En pasient som er kronisk syk, tar hver dag en tablett som inneholder 0,33 mg av en bestemt medisin. Kroppen bryter ned 33,3 % av denne medisinen på ett døgn. Hvis pasienten har mer enn 1,5 mg av denne medisinen lagret i kroppen, kan det gi alvorlige bivirkninger.

d) Ville du ha anbefalt denne medisinbehandlingen for pasienten? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 19 (6 poeng)

Anne vil spare for å kjøpe bil. Hun setter inn 20 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Renten er 6 % per år i hele spareperioden.

a) Finn ut hvor mye som står på kontoen rett etter at det fjerde beløpet er satt inn. Sett opp et uttrykk for hvor mye som står på Annes konto rett etter at det n-te beløpet er satt inn.

Bilen hun vil kjøpe, koster 330 000 kroner.

b) Hvor lenge må Anne spare før det er 330 000 kroner på kontoen?

Anne ønsker å kunne kjøpe bilen like etter at det 10. beløpet er satt inn.

c) Hvor stort beløp må hun da sette inn på kontoen i begynnelsen av hvert år?

Oppgave 20 (8 poeng)

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttallene.

a) Skriv opp de 6 første trekanttallene a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 og a_6 og de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5

Nedenfor er et utsnitt av Pascals trekant. Skriv av dette utsnittet i besvarelsen din, og marker der de seks første trekanttallene og de fem første summene.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+4+....+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

c) Bruk digitale hjelpemidler, og finn summen av de 50 første trekanttallen

I Pascals trekant er n-te rad gitt ved binomialkoeffisientene $\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} ... \binom{n}{n}$

d) Bruk Pascals trekant og det du fant i a) til å forklare at

$a_n = \binom{n+1}{2}$ og $S_n = \binom{n+2}{3}$

Oppgave 21 (6 poeng) (VÅR 2017)

Ingrid inngår en pensjonsavtale der hun skal spare 20 000 kroner i året. Den første innbetalingen skjer 1. januar 2018. Den siste innbetalingen skjer 1. januar 2052.
Hun får en fast rente på 3,00 % per år.

a) Bruk CAS til å vise at Ingrid vil ha 1 209 242 kroner på konto rett etter siste innbetaling.

Ingrid planlegger å ta ut et fast beløp hvert år. Det første uttaket vil hun gjøre 1. januar 2053 og det siste uttaket 1. januar 2067. Da skal kontoen være tom. Hun regner med en rente på 3,00 % per år.

b) Hvor mye kan hun ta ut per år?

Ingrid synes det er tilstrekkelig å ta ut 80 000 kroner i året fra og med 1. januar 2053.

c) Bruk CAS til å bestemme når kontoen vil være tom i dette tilfellet.

Oppgave 22 (8 poeng) (HØST 2017)

Annette vurderer å ta opp et boliglån på 1 500 000 kroner. Renten er 0,3 % per måned. Lånet skal nedbetales som et annuitetslån med 180 månedlige terminer. Første innbetaling er én måned etter låneopptak.

a) Vis at terminbeløpet Annette må betale, er 10 797 kroner.

Annette regner med å ha litt trang økonomi de nærmeste årene. Banken tilbyr henne derfor en ordning der hun betaler 8000 kroner per måned de første fem årene. Etter dette økes terminbeløpet slik at lånet er helt nedbetalt 15 år etter at hun tok opp lånet.

b) Vis at Annette har 1 270 289 kroner igjen av lånet etter de fem første årene dersom hun velger denne ordningen.

c) Bestem det månedlige terminbeløpet de siste 120 terminene dersom Annette går inn for denne ordningen.

Annette liker ordningen med redusert terminbeløp de første fem årene, men synes det nye terminbeløpet i c) er litt for høyt. Hun ønsker å betale 11 000 kroner i terminbeløp etter de første fem årene.

d) Bruk CAS til å bestemme hvor mye dette vil forlenge tiden det tar å nedbetale lånet.