Eksamensoppgaver S2 - sannsynlighet

Oppgave 1

a) Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X er gitt ved

x	-3	0	1	B
$P(X=x)$	0,2	0,1	A	0,3

Du får opplyst at $B>1$

1) Bestem A og $P(X<1)$.

   Summen av sannsynlighetene i tabellen skal være 1.

   Verdien av A blir dermed $1-(0,2+0,1+0,3)=\underline{\underline{0,4}}$

   $P(X<1)=P(X=-3)+P(X=0)=0,2+0,1=\underline{\underline{0,3}}$

2) Bestem B når du får opplyst at $E(X)=1,0$.

   Vi setter opp et uttrykk for $E(X)$ og finner B.

   $$E(X)=-3\cdot 0,2+0\cdot 0,1+1\cdot 0,4+B\cdot 0,3=-0,6+0,4+0,3\cdot B=\underline{-0,2+0,3\cdot B}$$

   Det gir

   $$\begin{aligned}-0,2+0,3\cdot B&=1,0\\ 0,3\cdot B&=1,2\\ B&=\underline{\underline{4}}\end{aligned}$$

3) Vis at variansen er $Var(X)=6,0$.

   $$\begin{aligned}Var(X)&=(-3-1)^2\cdot 0,2+(0-1)^2\cdot 0,1+(1-1)^2\cdot 0,4+(4-1)^2\cdot 0,3\\ &=16\cdot 0,2+1\cdot 0,1+0\cdot 0,4+9\cdot 0,3=3,2+0,1+2,7=\underline{\underline{6,0}}\end{aligned}$$

b) En stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu=30$ og $\sigma=2,5$.

1) Bestem $P(X\leq 31)$ $P(X\leq 31)=\underline{\underline{0,6554}}$

2) Bestem $P(X>28)$ $P(X>28)=\underline{\underline{0,7881}}$

Oppgave 2

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien er $E(X)=\frac{1}{2}$ og at variansen er $Var(X)=\frac{7}{12}$.

a) Vis at disse opplysningene gir oss ligningssystemet

$$\begin{aligned} a+b+c&=1 \\ -a \quad +c&=\frac{1}{2} \\ 27a+3b+3c&=7 \end{aligned}$$

Samlet sannsynlighet er lik 1. Det betyr at $a+b+c=1$

$$E(X)=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; (-1)\cdot a+0\cdot b+1\cdot c=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -a+c=\frac{1}{2}$$

$$Var(X)=\frac{7}{12} \;\Rightarrow\; \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot a+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot b+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot c=\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow\; \frac{9}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot b+\frac{1}{4}\cdot c=\frac{7}{12} \;\Rightarrow\; 27a+3b+3c=7$$

b) Bestem verdiene av a, b og c.

$a+b+c=1 \;\Rightarrow\; c=1-a-b$

Det gir

$$\begin{bmatrix} -a+(1-a-b)=\frac{1}{2} \\ 27a+3b+3(1-a-b)=7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2a+1-b=\frac{1}{2} \\ 27a+3b+3-3a-3b=7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -b=\frac{1}{2}-1+2a \\ 24a+3=7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b=\frac{1}{2}-2a \\ a=\frac{1}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow\; b=\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; c=1-a-b=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

Vi får løsningene $a=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ $\quad b=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ $\quad c=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Oppgave 3

I et terningspill på et kasino blir det kastet to vanlige terninger. Dersom summen av antall øyne er 10, får spilleren 200 kroner. Blir summen av antall øyne 7, får spilleren 50 kroner. Dersom summen blir et annet tall, får ikke spilleren gevinst.

La a være prisen en spiller må betale for ett spill, og X utbyttet til kasinoet ved én tilfeldig spilleomgang.

a) Skriv av og fyll ut tabellen nedenfor

x	a	$a-200$	$a-50$
$P(X=x)$	$\frac{27}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$

Det er til sammen 36 mulige utfall. Tre av utfallene gir summen 10, 4+6, 5+5 og 6+4. Seks av utfallene gir summen 7, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 og 6+1.

b) Hva bør kasinoet sette prisen a til for at de i det lange løp skal ha et gjennomsnittlig utbytte på 5 kroner per spill?

$$E(X)=5$$

$$\frac{27}{36}\cdot a+\frac{3}{36}(a-200)+\frac{6}{36}(a-50)=5$$

$$27a+3a-600+6a-300=180$$

$$36a=1080$$

$$a=30$$

Kasinoet bør sette prisen per spill til 30 kroner.

Oppgave 4

I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.

Levetiden X til en type lyspærer er normalfordelt med forventet levetid $\mu=2000$ timer og med et standardavvik $\sigma=400$ timer .

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt lyspære lyser færre enn 1600 timer.

$$P(X\leq 1600)=P\left(Z\leq\frac{1600-2000}{400}\right)=P(Z\leq -1)=\underline{\underline{0{,}1587}}=\underline{\underline{15{,}87\%}}$$

b) Sannsynligheten er 90 % for at en tilfeldig valgt pære vil lyse i mer enn x timer. Bestem x .

$$P(X > x) = 0{,}90 \;\Rightarrow\; P(X \le x) = 0{,}10 \;\Rightarrow\; P(Z \le z) = 0{,}10 \;\Rightarrow\; z = -1{,}28$$

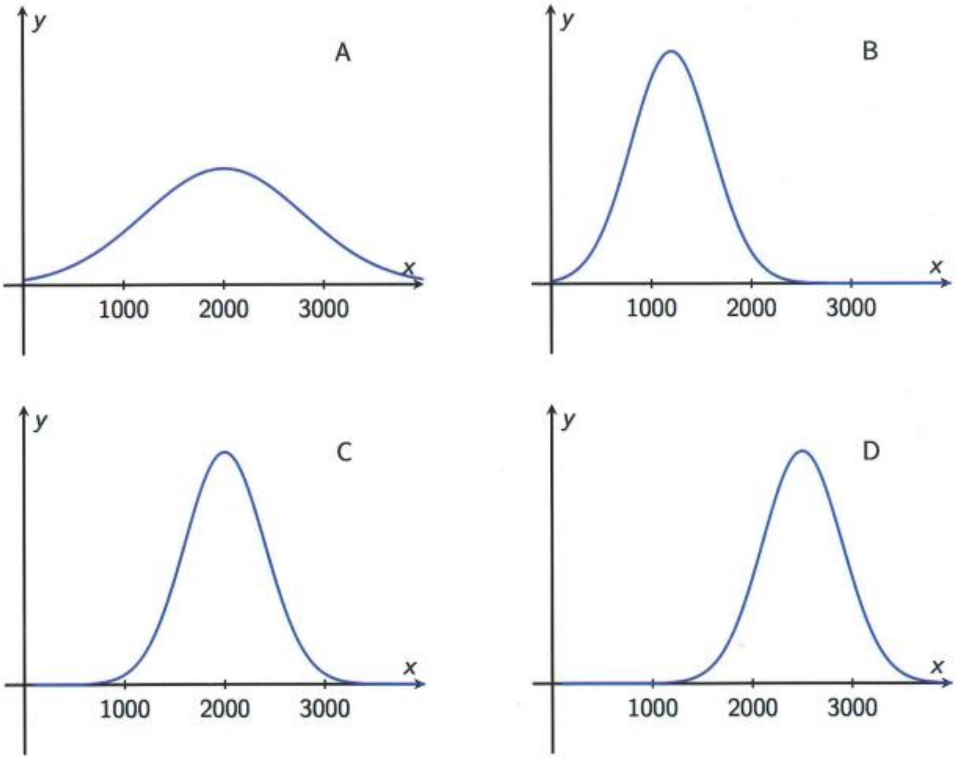
$$\Downarrow$$

$$\frac{x - 2000}{400} = -1{,}28$$

$$x = -512 + 2000$$

$$x = \underline{\underline{1488}}$$

Hvilken av de grafiske framstillingene nedenfor illustrerer X ? Begrunn svaret.



For B og D er $\mu \neq 2000$ og kan derfor utelukkes. Siden ca. 68 % av arealet skal ligge i området 1600 til 2400, kan vi utelukke A. Framstilling C illustrerer X .

Oppgave 5

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	0	1	2
$P(X = x)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien $E(X) = \frac{1}{2}$ og variansen $Var(X) = \frac{1}{2}$.

a) Vis at disse opplysningene gir oss likningssystemet

$$a+b+c=1$$
$$b+2c=\frac{1}{2}$$
$$a+b+9c=2$$

Samlet sannsynlighet er lik 1. Det betyr at $a+b+c=1$.

$$E(X)=\frac{1}{2} \Rightarrow 0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=\frac{1}{2} \Rightarrow b+2c=\frac{1}{2}$$

$$Var(X)=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot a+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot b+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\cdot c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot b+\frac{9}{4}\cdot c=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b+9c=2$$

Bestem ved regning verdien av a, b og c.

$a+b+c=1 \Rightarrow b=1-a-c$

Det gir

$a+(1-a-c)+9c=2$

$$\Rightarrow a+1-a-c+9c=2 \Rightarrow 8c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}-\frac{2}{8}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{8-2-1}{8}=\frac{5}{8}$$

Vi får løsningene $\underline{\underline{a=\frac{5}{8}}}$ $\quad \underline{\underline{b=\frac{1}{4}}}$ $\quad \underline{\underline{c=\frac{1}{8}}}$

Oppgave 6

I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.

Vekten X av voksne hjortebukker i en kommune er normalfordelt med forventningsverdi $\mu=100$ kg og med standardavvik $\sigma=20$ kg.

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mindre enn 90 kg.

$$P(X<90)=P\left(Z<\frac{90-100}{20}\right)=P(Z<-0{,}5)=\underline{\underline{0{,}3085}}=\underline{\underline{30{,}85\%}}.$$

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mellom 90 og 110 kg.

$$P(90<X<110)=1-2\cdot P(X<90)=1-2\cdot 0{,}3085=1-0{,}6170=\underline{\underline{0{,}3830}}=\underline{\underline{38{,}30\%}}.$$

Alternativt:

$$P(90 < X < 110) = P\left(\frac{90-100}{20} < Z < \frac{110-100}{20}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5)$$
$$= P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = 0,6915 - 0,3085 = \underline{\underline{0,3830}} = \underline{\underline{38,30\%}}$$

Oppgave 7

Oppgave 8

Oppgave 9

Oppgave 10

Oppgave 11

Oppgave 12

Oppgave 13

En fabrikk produserer juice i kartonger. Hver kartong skal inneholde ca. 0,33 L juice. I denne oppgaven tenker vi at innholdet i boksene er normalfordelt med forventningsverdi 0,33 L og standardavvik på 0,03 L.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kartong inneholder mer enn 0,36 L?
Sannsynligheten for at en tilfeldig kartong inneholder mer enn 0,36 L er 15,9

b) Hvor mange prosent av kartongene vil inneholde mellom 0,32 L og 0,34 L?
26,1 % av kartongene vil inneholde mellom 0,32 L og 0,34 L.

I en kvalitetskontroll inneholdt 25 tilfeldige kartonger gjennomsnittlig 0,292 L juice.

c) Sett opp hypoteser og vurder om bedriften i snitt tapper for lite juice på kartongene. Bruk et signifikansnivå på 5 %.
Nullhypotesen: $H_0: \ \mu = 0,33$
Den alternative hypotesen: $H_1: \ \mu < 0,33$
Sentralgrensesetningen sier at innholdet i 25 kartonger er normalfordelt med $\mu = 0,33 \cdot 25$ og $\sigma = 0,03 \cdot 5$. Jeg regner ut $P(\text{Innhold i 25 kartonger}) \leq 0,292 \cdot 25$
Sannsynligheten, p-verdien, er langt under 5 %.
Det betyr at bedriften i snitt tapper for lite juice på kartongene.

Oppgave 4

En grossist som selger jordbær, har over tid registrert at 10 % av jordbærkassene inneholder bær som er ødelagt. En dag mottar grossisten 50 kasser. Vi antar at 10 % av kassene inneholder bær som er ødelagt.

a) Hva er sannsynligheten for at akkurat 5 av kassene har ødelagte bær?
La X være antall kasser med ødelagt bær. Antar at X er binomisk fordelt med $p = 0,10$.
Sannsynligheten for at akkurat 5 av 50 kasser har ødelagt bær blir

$$P(X=5)=\binom{50}{5}\cdot 0{,}10^{5}\cdot(1-0{,}10)^{50-5}=\underline{0{,}185}$$

Det er 18,5 % sannsynlighet for at akkurat 5 av de 50 kassene med jordbær inneholder ødelagte bær.

b) Finn sannsynligheten for at minst 5 kasser inneholder ødelagte bær.

$$P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-\sum_{k=0}^{k=4}\binom{50}{k}\cdot 0{,}10^{k}\cdot(1-0{,}10)^{50-k}=\underline{0{,}569}$$

Grossisten får mistanke om at mer enn 10 % av kassene inneholder ødelagte bær. For å undersøke forholdet nærmere kontrollerer han 90 kasser. Ved denne kontrollen viser det seg at 15 av de 90 kassene inneholder bær som er ødelagt.

Vi lar p være sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kasse inneholder ødelagte bær.

c) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen. Forklar hvordan du har tenkt.

Utgangspunktet er at 10 % av kassene inneholder ødelagte bær. Vi vil sjekke om denne prosentandelen har økt. Kontrollen grossisten foretar viser at $\frac{15}{90}$, dvs. 16,7 % av kassene inneholder ødelagte bær. Vi skal undersøke om denne kontrollen gir grunnlag for å si at det generelt er mer enn 10 % av jordbærkassene som inneholder ødelagte bær. Det kan jo være tilfeldig at det akkurat var så mange som 15 av de 90 kontrollerte kassene som inneholdt ødelagte bær.

Jeg setter opp en nullhypotese H_0 der jeg antar at prosentandelen på 10 % ødelagte bær fortsatt gjelder, og en alternativ hypotese H_1 der jeg antar at prosentandelen har økt.

H_0 : Andel jordbærkasser med ødelagte bær er 10 %, dvs. $p=0{,}10$.

H_1 : Andel jordbærkasser med ødelagte bær er mer enn 10 %, dvs. $p>0{,}10$.

d) Undersøk om resultatet av kontrollen gir grunnlag for å si at kvaliteten på jordbærene har blitt dårligere. Velg et signifikansnivå på 5 %.

Sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra viser at det er 3,3 % sannsynlighet for at 15 kasser eller flere i en stikkprøve på 90 kasser vil inneholde ødelagte bær hvis nullhypotesen gjelder.

Vi satt et signifikansnivå på 5 %. Det betyr at vi forkaster nullhypotesen H_0 og godtar den alternative hypotesen H_1 .

Oppgave 5

Et meningsmålingsinstitutt gjennomfører en spørreundersøkelse for et bestemt politisk parti. I undersøkelsen blir 1500 tilfeldig valgte personer spurt om de ville ha stemt på partiet dersom det var valg.

I undersøkelsen svarer 321 personer at de ville ha stemt på partiet. Ved forrige valg stemte19,8 % av velgerne på partiet.

Bruk det du har lært i statistikk, til å vurdere om partiet har hatt framgang siden forrige valg. Begrunn resonnementet ditt med beregninger.

Lar X være antall personer av de 1500 personene i undersøkelsen som ville ha stemt på partiet. Antar at X er binomisk fordelt med $p = 0{,}198$ og $n = 1500$.

Stiller opp en nullhypotese H_0 og en alternativ hypotese H_1 for problemstillingen ovenfor.

H_0 : Partiet har ikke hatt framgang siden forrige valg, dvs. $p = 0{,}198$

H_1 : Partiet har hatt framgang siden forrige valg, dvs. $p > 0{,}198$

I undersøkelsen ovenfor svarte 321 av 1500 at de ville stemme på partiet, dvs. 21,4 %. Vi skal finne ut om dette resultatet gir grunnlag til å forkaste nullhypotesen. Vi ser jo at 21,4 % er noe høyere enn 19,8 % som partiet hadde ved forrige valg. Er dette tilfeldig, eller kan vi med rimelig sikkerhet si at partiet har hatt en vekst?

Velger et signifikansnivå på 5 %. Det betyr at det er 5 % sannsynlighet for at vi forkaster H_0 på feil grunnlag.

Brukes binomisk fordeling og finner

$$P(X \geq 321) = 1 - P(X < 321) = 1 - \sum_{k=0}^{k=320} \binom{1500}{k} \cdot 0{,}198^k \cdot (1 - 0{,}198)^{(1500-k)} = 0{,}065$$

Vi finner at det er 6,5 % sannsynlighet for at 321 personer eller flere ville svare at de stemte på partiet selv om den virkelige oppslutningen om partiet ikke hadde økt.
Vi satt et signifikansnivå på 5 %. Det betyr at vi IKKE forkaster nullhypotesen H_0.

Alternativt: Normaltilnærming

Sjekker om normaltilnærming kan brukes, dvs. $np > 5$ og $n(1-p) > 5$

I denne oppgaven er $np = 1500 \cdot 0{,}198 = 297$ og $n(1-p) = 1500 \cdot (1 - 0{,}198) = 1203$. Det betyr at kravene er innfridd. Forventningsverdien $\mu = np = 1500 \cdot 0{,}198 = 297$ og standardavvik

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{297(1-0{,}198)} = 15{,}43$

Normalfordelingsfunksjonen gir $p-$verdien $P(X > 321) = 1 - P(X \leq 321) = 1 - 0{,}9401 = 0{,}06 = 6\%$

Vi får samme konklusjon ved normaltilnærming som ved binomisk, dvs. ikke forkaste H_0

Oppgave 5

For at en bestemt type hamburgere skal kunne bli merket med «grønt nøkkelhull», må de inneholde høyst 10 g fett. I en kontroll viste det seg at fettinnholdet (i gram) i 10 tilfeldig valgte hamburgere var

11, 10, 11, 12, 9, 10, 11, 12, 10, 11

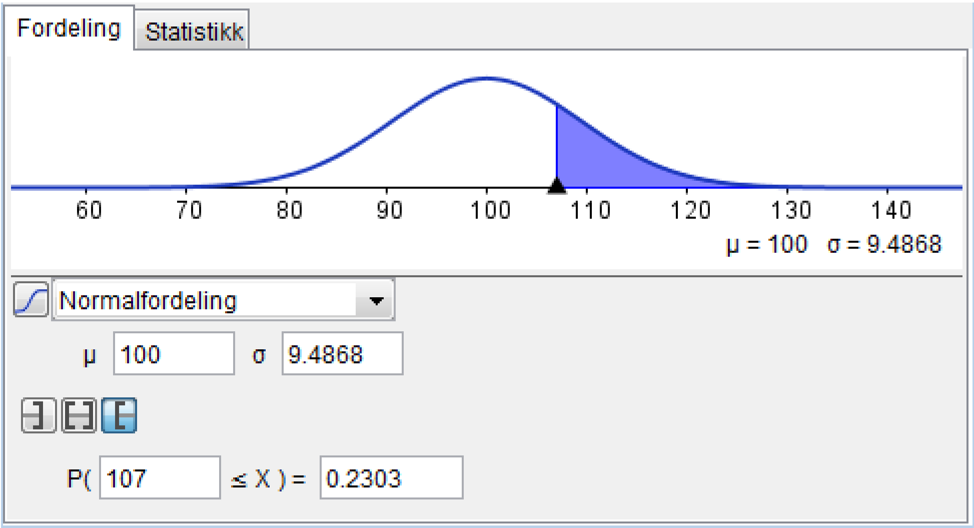
Vi antar at fettinnholdet er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 10$ g og med standardavvik $\sigma = 3$ g.

Bedriften oppgir at fettinnholdet er 10 g. En forbrukergruppe påstår at fettinnholdet er for stort til at hamburgerne kan bli merket med grønt nøkkelhull.

Bruk hypotesetesting til å vurdere påstanden. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Nullhypotesen: $H_0: \ \mu = 10$.
Alternativ hypotese: $H_1: \ \mu > 10$.

Jeg antar H_0
Siden fettinnholdet i én hamburger er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 10$ g og med standardavvik $\sigma = 3$ g, så er fettinnholdet i 10 hamburgere ifølge Sentralgrensesetningen normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 10 \cdot 10$ g og med standardavvik $\sigma = 3 \cdot \sqrt{10}$ g.
Jeg finner sannsynligheten for at vi rent tilfeldig kan få så mye fett i 10 hamburgere som vi her får.



Vi får en p-verdi på 23.03 %. Det er altså 23.03 % sannsynlig at vi får så høye fettverdier samtidig som nullhypotesen gjelder. Dette er langt over signifikansnivået på 5 %.
Det er ikke grunn til å si at fettinnholdet er for stort til at hamburgerne kan bli merket med grønt nøkkelhull.

Oppgave 5

Oppgave 5

Oppgave 5

Oppgave 5

Oppgave 5