Oppgaver S2 - funksjoner

DEL 1

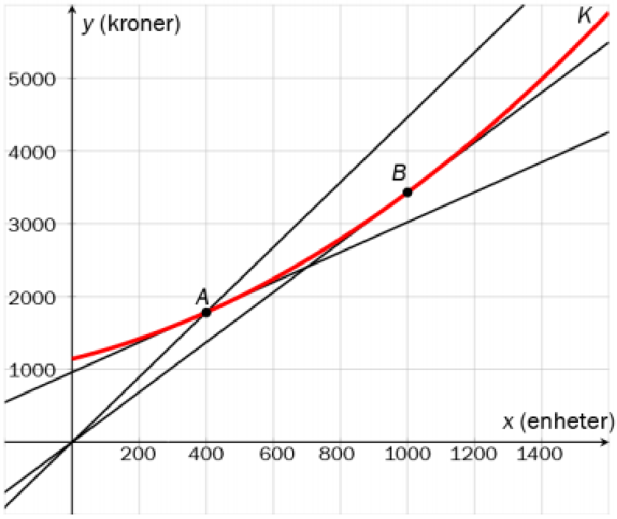
Oppgave 1 (5 poeng)

I koordinatsystemet ser du grafen til en kostnadsfunksjon K, markert med rødt på figuren. Det er også tegnet inn tre rette linjer. Disse har likningene

$y = 4{,}46x$, $y = 3{,}43x$ og $y = 2{,}06x + 960$

To av linjene tangerer grafen til funksjonen $y = K(x)$ i henholdsvis A og B.

Enhetskostnaden ved produksjon av x enheter er $\frac{K(x)}{x}$.



a) Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er 2,06 kroner per enhet.

c) Bestem den minste enhetskostnaden.

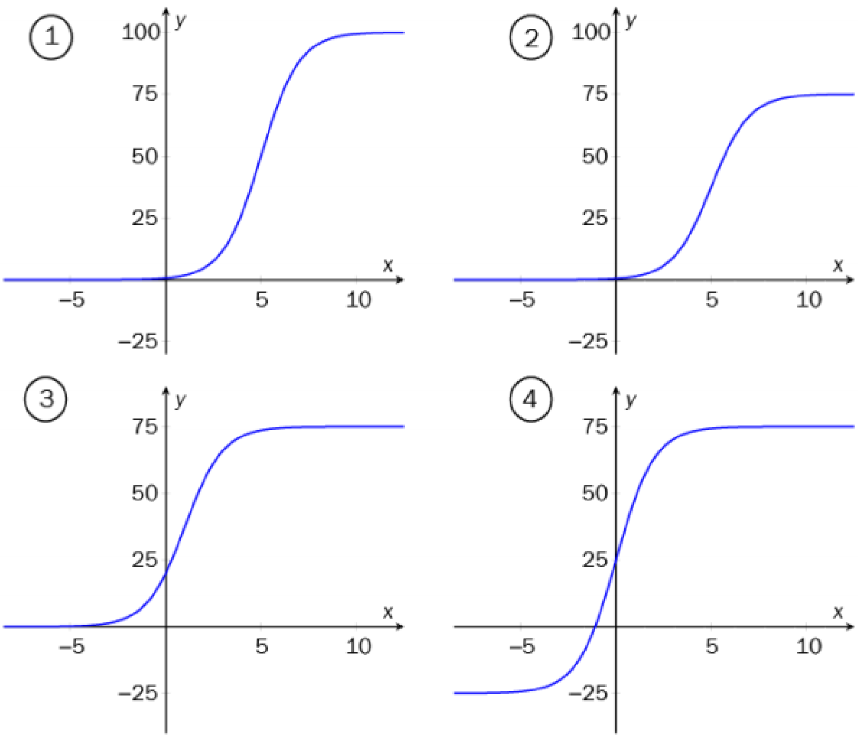
Oppgave 2 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem hvilke punkter på grafen til f som har tangent med stigningstall lik 2.

Oppgave 3 (4 poeng)



På figuren ovenfor er det tegnet fire grafer.

Avgjør hvilken graf som hører til funksjonen f og hvilken graf som hører til funksjonen g når

$$f(x)=\frac{100}{1+e^{-x}}-25 \qquad \text{og} \qquad g(x)=\frac{100}{1+e^{-(x-5)}}$$

Begrunn svaret ditt.

Oppgave 4 (4 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter for en bedrift. De totale kostnadene $K(x)$ er gitt ved

$$K(x)=20\,000+120x+0{,}05x^2$$

Prisen $p(x)$ for én enhet er gitt ved

$$p(x)=480-0{,}1x$$

a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.

b) Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bestem den produksjonsmengden som gir det største overskuddet.

Oppgave 5 (4 poeng)

En bedrift produserer en vare. De totale kostnadene K ved produksjon av x enheter kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Vi får vite at

- kostnadene er 3000 når det produseres 10 enheter
- kostnadene er 8000 når det produseres 20 enheter
- grensekostnadene ved produksjon av 10 enheter er 350

a) Forklar at dette gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} &100a + 10b + c = 3000 \\ &400a + 20b + c = 8000 \\ &20a + b = 350 \end{aligned}$$

b) Løs likningssystemet.

Oppgave 6 (6 poeng)

Totalkostnaden i kroner ved produksjon av en vare er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 70x + 4000 \quad , \qquad 0 < x < 2000$$

Her er x antall produserte enheter per uke.

Inntekten i kroner ved denne produksjonen er gitt ved

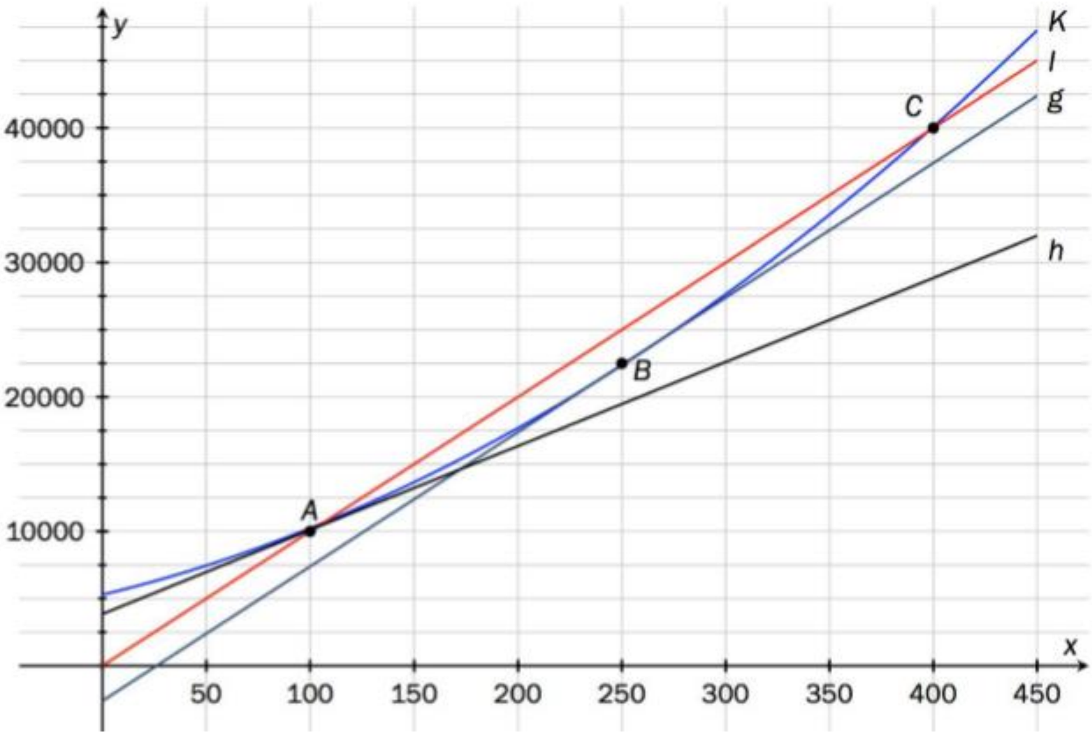
$$I(x) = -0{,}05x^2 + 280x \quad , \qquad 0 < x < 2000$$

a) Bestem $K'(500)$ og $I'(500)$. Bruk svarene til å vurdere om bedriften bør produsere flere enn 500 enheter.

b) Bestem den vinningsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir størst overskudd. Bestem den kostnadsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet.

Oppgave 7 (5 poeng)

På figuren har vi tegnet grafen til en kostnadsfunksjon K (blå graf) og en inntektsfunksjon I (rød graf). Her er $K(x)$ de daglige kostnadene ved å produsere og selge x enheter. Både kostnader og inntekter er regnet i kroner.



På samme figur har vi også tegnet inn to tangenter til grafen til K. Disse er gitt ved

$$g(x) = 100x - 2613$$

$$h(x) = 62{,}5x + 3850$$

a) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge daglig for at den skal ha et overskudd?

b) Bestem grensekostnaden ved produksjon og salg av 100 enheter.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig?

DEL 2

Oppgave 1 (8 poeng)

Maria trener på et apparat i et treningssenter. La $f(x)$ være treningseffekten, det vil si antall kilojoule som forbrennes per minutt, x minutter etter starten på treningsøkten. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 42\left(1 - e^{-x}\right) + 1{,}05x \qquad , \qquad x \geq 0$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bruk grafen til å bestemme treningseffekten etter 3 min og når treningseffekten er 50 kJ/min.
Det samlede energiforbruket E, målt i kilojoule (kJ), i de første t minuttene av treningen er gitt ved

$$E(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Bestem det samlede energiforbruket til Maria i løpet av de første 10 minuttene.

d) Anslå hvor lenge Maria må trene for at det samlede energiforbruket skal bli 1300 kJ.

Oppgave 2 (6 poeng)

De daglige kostnadene i kroner til en bedrift som produserer x enheter av en vare per dag er gitt i tabellen nedenfor.

x	40	50	60	70	80	90	100
$K(x)$	1200	2200	3600	5500	7800	10500	13700

a) Bruk regresjon til å bestemme et andregradsuttrykk for $K(x)$.
Inntektene I kroner ved salg av x enheter per dag er gitt ved

$I(x) = p \cdot x$, der p er prisen på varen og $x \in [40, 100]$

b) Hva må p være dersom overskuddet skal bli størst når det produseres og selges 75 enheter per dag. Hvor stort blir overskuddet da?

Bedriften har gjort en markedsanalyse. Sammenhengen mellom antall solgte enheter x og prisen p viser seg å være

$$x = 200 - 1{,}2p$$

c) Bestem hvilken pris som vil gi det største overskuddet per dag.

Oppgave 3 (8 poeng)

I 1992 skrev forskerne Ward og Whipp en artikkel i tidsskriftet Nature. De brukte regresjon til å hevde at de beste kvinnelige løperne før eller siden vil løpe like raskt som de mannlige på maratondistansen.

I tabellene ser du gjennomsnittsfarten for verdensrekordløp i maraton for noen år.

Menn:

Årstall	1909	1913	1920	1935	1960	1970	1988
Fart (m/s)	4,38	4,51	4,61	4,81	5,20	5,43	5,55

Kvinner:

Årstall	1963	1967	1970	1973	1975	1979	1985
Fart (m/s)	3,24	3,75	3,85	4,22	4,44	4,77	4,98

a) Lag lineære modeller f og g for farten til menn og kvinner. La x være antall år etter 1900.

b) Hvilket år vil kvinner løpe like raskt som menn, ifølge modellen

Raskeste mannlige løper (Dennis Kimetto) løp i 2014 med en gjennomsnittsfart på 5,72 m/s, mens beste kvinnelige løper (Tirfi Tsegaye) samme år løp med en gjennomsnittsfart på 5,01 m/s.

c) Hvordan vurderer du gyldigheten til modellene ovenfor ut fra disse resultatene?

En logistisk modell for gjennomsnittlig maratonfart (i m/s) for mennenes rekordløp x år etter 1900 er gitt ved:

$$h(x)=\frac{6,65}{1+0,751e^{-0,012x}}$$

d) Vi tenker oss at vi kan bruke den logistiske modellen også etter år 2000. Hvilket år vil da maraton første gang bli løpt på under to timer? Maratondistansen er 42 195 m.

Oppgave 4 (6 poeng)

I lungene blir oksygen bundet til hemoglobin og transportert rundt i kroppen av blodet. Hemoglobinet er mettet når det ikke er i stand til å ta opp mer oksygen.

Den engelske fysiologen A.V. Hill oppdaget i 1910 en sammenheng mellom deltrykket til oksygenet i lungene, og metningsgraden g.

Han fant ut at under visse forhold er

$$g(x)=\frac{x^3}{x^3+25000} \quad , \quad x>0$$

Her er deltrykket x målt i mmHg (millimeter kvikksølv).

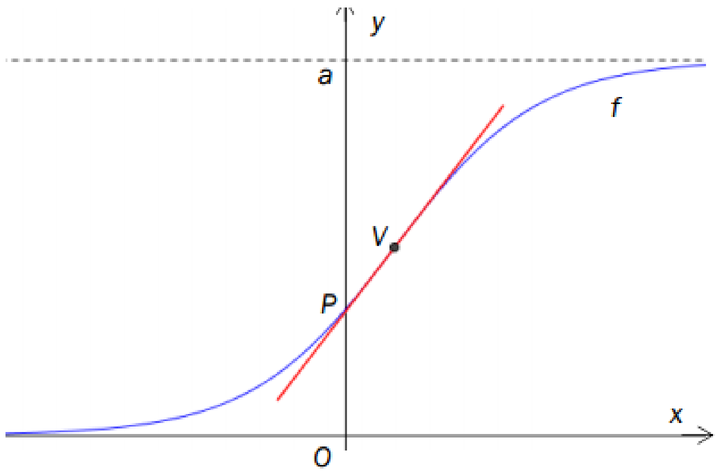
e) Bruk graftegner til å tegne grafen til g.

f) Bestem grafisk hva deltrykket x må være for at metningsgraden $g(x)$ skal være større enn 0,8.

g) Bruk derivasjon til å vise at metningsgraden øker dersom deltrykket øker. Forklar.

Oppgave 5 (5 poeng)

Grafen til en logistisk funksjon $f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-k\cdot x}}$ er skissert nedenfor.



a) Grafen skjærer y-aksen i punktet P. Bestem y-koordinaten til P uttrykt ved a og b.

Bruk CAS og derivasjon til å vise at vendepunktet V har y-koordinat lik $\dfrac{a}{2}$.

b) Bruk CAS til å vise at tangenten i V har stigningstall lik $\dfrac{a\cdot k}{4}$.

Oppgave 6 (7 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter fra en bedrift. Sammenhengen mellom x og prisen per enhet er

$$p(x) = 500 - 0{,}1x$$

a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.
Tabellen nedenfor viser kostnaden ved produksjon av x enheter for en del verdier av x

x	500	1000	1500	2000	2500
$K(x)$	92 300	195 000	310 000	461 000	641 000

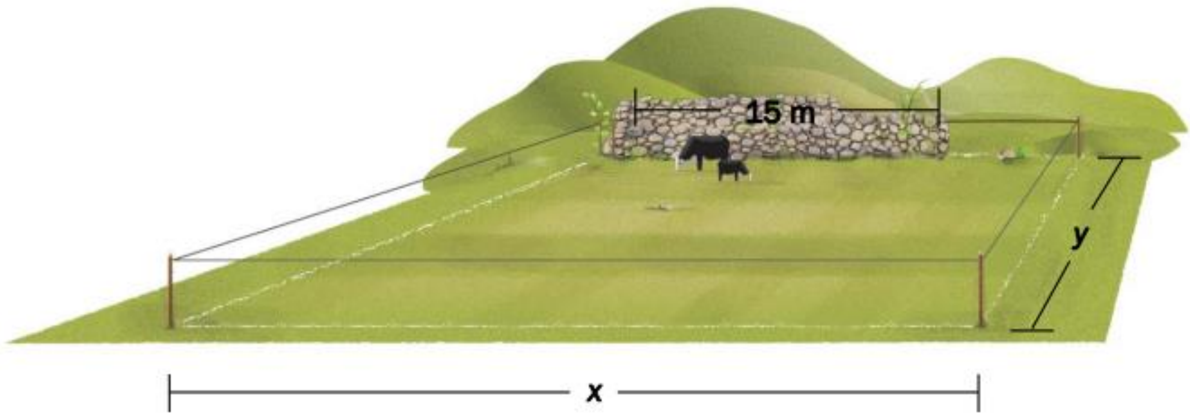
b) Bruk tabellen til å lage en modell for kostnadsfunksjonen K.

c) Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bruk $O'(x)$ til å bestemme den produksjonsmengden som gir størst overskudd.

d) Forklar hvorfor løsningen av likningen $K'(x) = I'(x)$ gir samme resultat som i oppgave c).

Oppgave 7 (5 poeng)

En bonde skal gjerde inn kuene sine på et rektangelformet område. Området skal være på 625 m^2.
Bonden skal bruke en 15 m lang steinmur som en del av inngjerdingen.
Se skissen nedenfor.



a) Vis at en funksjon G som beskriver lengden av gjerdet kan skrives som

$$G(x) = \frac{2x^2 - 15x + 1250}{x} \text{ når } \quad x > 15$$

b) Bestem hvor langt gjerde bonden må bruke dersom han skal bruke kortest mulig gjerde. Hvilken form har da området til bonden?

Oppgave 8 (6 poeng)

Den amerikanske geofysikeren Marion King Hubbert lanserte i 1956 følgende modell for verdens årlige oljeforbruk:

$$V(t)=\frac{3400\cdot e^{-0{,}051\cdot t}}{\left(1+56\cdot e^{-0{,}051\cdot t}\right)^2}$$

Her er $V(t)$ antall milliarder fat olje som produseres i år t etter 1930. For eksempel er $V(5)$ antall milliarder fat som ble produsert i 1935

a) Tegn grafen til V.

b) Når vil produksjonen være 10 milliarder fat per år ifølge modellen?

c) Hvilket år vil produksjonen være størst?

d) Hva vil den totale produksjonen av olje være i årene fra og med 1930 til og med 2014?

Oppgave 9 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser det totale antallet artikler som var tilgjengelige på Wikipedia utvalgte år.

År	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Antall artikler	19 700	188 800	895 000	2 153 000	3 144 000	3 835 000

Basert på disse tallene påstår en journalist at i 2020 vil antallet tilgjengelige artikler være rundt 7 millioner. En annen journalist påstår at antallet artikler vil stabilisere seg på rundt 4 millioner.

a) Vurder hvilke matematiske modeller journalistene kan ha brukt for å komme fram til disse tallene.

En modell for antallet tilgjengelige artikler er gitt ved en funksjon g.
Økningen i antallet artikler (i millioner) per år er ifølge denne modellen

$$g'(x)=\frac{576e^{-0{,}68x}}{\left(1+211e^{-0{,}68x}\right)^2}$$

Her er x antall år etter 2000.

b) Bruk graftegner til å bestemme hvilket år antall artikler vokste raskest, ifølge denne modellen.

c) Bestem $\int_0^{15} g'(x)\,dx$

Hva er den praktiske tolkningen av dette svaret?

Oppgave 10 (6 poeng)

En bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag. Det viser seg at inntekten I i kroner per dag er gitt ved

$$I(x) = 3200 \cdot \ln(2{,}5x + 1) \quad , \qquad x \geq 0$$

Kostnaden K i kroner per dag kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Erfaringer viser at

- det koster i alt 3225 kroner å produsere 50 enheter per dag
- det koster i alt 4900 kroner å produsere 100 enheter per dag
- grensekostnadene ved å produsere 100 enheter er 41 kroner per enhet

a) Bruk CAS til å bestemme a, b og c. Vis at

$$K'(x) = 0{,}3x + 11$$

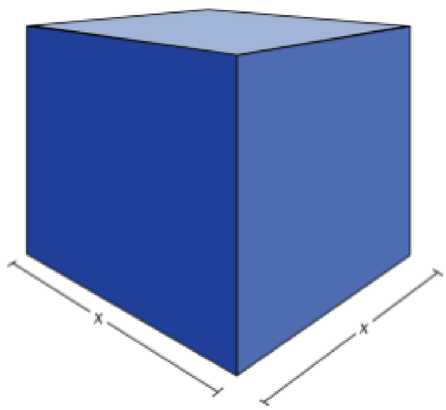
b) Bestem $I'(100)$ og $K'(100)$. Hva forteller svarene oss?
Avgjør ut fra svarene om bedriften bør produsere flere eller færre enn 100 enheter per dag.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge per dag for at overskuddet skal bli størst mulig?

Oppgave 11 (6 poeng)

En bedrift skal produsere et skap formet som en rett prisme. Skapet skal ha kvadratisk bunn, og volumet skal være 800 L.

Materialet til sideflatene og toppen koster 230 kroner/m^2.
Materialet til bunnen koster 450 kroner/m^2.



a) Vis at de totale materialkostnadene er gitt ved

$$K(x) = 680x^2 + \frac{736}{x}, \qquad x > 0$$

der x er lengden på sidene i bunnen, målt i meter.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til K.

c) Bestem x slik at materialkostnadene blir lavest mulig.

Oppgave 12 (7 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Bedriften regner med at den daglige etterspørselen $x = E(p)$ er gitt ved

$$E(p) = 341 - p^2 \quad \text{for } p \in [4, 16]$$

der p er prisen i kroner per enhet.

a) Bestem inntekten I uttrykt ved p.

b) Hvilken pris gir høyest inntekt?

De daglige kostnadene ved å produsere og selge x enheter er $K(x)$ kroner. Tabellen nedenfor viser kostnadene for noen x-verdier.

x	50	100	150	200	250	300
$K(x)$	792	1065	1329	1601	1867	2136

c) Bruk blant annet tallene i tabellen til å vise at en god modell for overskuddsfunksjonen er gitt ved
$$O(p) = -p^3 + 5{,}37p^2 + 341p - 2356$$

d) Bestem den prisen som gir størst overskudd.
Hvor mange enheter må bedriften produsere da?

Oppgave 13 (6 poeng)

En bedrift produserer en vare. Bedriften selger alt den produserer. Overskuddet O ved salg av x enheter per uke er gitt ved $O(x) = ax^2 + bx + c$

- Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.
- Overskuddet er størst når bedriften selger 475 enheter.
- Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.

a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet
$$\begin{aligned} 40\,000a + 200b + c &= 0 \\ 950a + b &= 0 \\ 1200a + b &= -5 \end{aligned}$$

b) Bruk CAS til å bestemme a, b og c.

c) Hva er det største overskuddet bedriften kan få per uke?

Oppgave 14 (8 poeng)

I et område er det brutt ut en smittsom sykdom. Antall personer som blir smittet per uke, kan modelleres med en logistisk funksjon g der

$$g(t)=\frac{N}{1+ae^{-kt}}$$

Her er N, a og k reelle tall, og $g(t)$ er antall personer som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

Tabellen nedenfor viser $g(t)$ for noen verdier av t.

t	0	5	12
$g(t)$	200	2000	9 000

a) Bruk regresjon til å bestemme N, a og k i uttrykket $g(t)$.

Nærmere undersøkelser viser at

$$f(t)=\frac{10000}{1+50e^{-0.5t}}$$

er en god modell for antallet som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til f. Bruk grafen til å bestemme når antall smittede personer per uke er 7000.

c) Bruk CAS til å bestemme $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{dt}$. Hva forteller dette svaret oss?

d) Hvor mange uker vil det gå før antall personer som er smittet, overstiger 15 000?