Arbeidshefte
1.ordens differensiallikninger
Løsningsforslag

1.ordens differensialliknigner - integrerende faktor

Oppgave 1

Oppgave 1 - 1

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 0 && \mid \cdot e^{\int 2\ dx} = e^{2x} \\ y' \cdot e^{2x} + y \cdot 2 \cdot e^{2x} &= 0 \\ (y \cdot e^{2x})' &= 0 \\ \int (y \cdot e^{2x})'\ dy &= \int 0\ dx \\ y \cdot e^{2x} &= C && \mid \cdot e^{-2x}, e^{2x} \cdot e^{-2x} = e^0 = 1 \\ y &= C \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 2

$$\begin{aligned} y' - 4y &= 0 && \mid \cdot e^{-4x} \\ y' \cdot e^{-4x} + y \cdot (-4)e^{-4x} &= 0 \\ (y \cdot e^{-4x})' &= 0 \\ y \cdot e^{-4x} &= C && \mid \cdot e^{4x} \\ y &= C \cdot e^{4x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 3

$$\begin{aligned} y' + y &= 1 && \mid \cdot e^{x} \\ (y \cdot e^{x})' &= e^{x} \\ y \cdot e^{x} &= \int e^{x}\ dx \\ y \cdot e^{x} &= e^{x} + C && \mid \cdot e^{-x} \\ y &= 1 + C \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 4

$$\begin{aligned} y' + 0,001y &= 0 && \mid \cdot e^{0,001x} \\ (y \cdot e^{0,001x})' &= 0 \\ \int (y \cdot e^{0,001x})' \ dy &= \int 0 \ dx \\ y \cdot e^{0,001x} &= C && \mid \cdot e^{-0,001x} \\ y &= C \cdot e^{-0,001x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 5

$$\begin{aligned} 4y' + 12y &= 0 && \mid \cdot \frac{1}{4} \\ y' + 3y &= 0 && \mid \cdot e^{3x} \\ (y \cdot e^{3x})' &= 0 \\ \int (y \cdot e^{3x})' &= \int 0 \ dx \\ y \cdot e^{3x} &= C && \mid \cdot e^{-3x} \\ y &= C \cdot e^{-3x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 6

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 6 && \mid \cdot e^{-2x} \\ (t \cdot e^{-2x})' &= 6 \cdot e^{-2x} \\ \int (y \cdot e^{-2x})' &= \int 6 \cdot e^{-2x} \quad dx \\ y \cdot e^{-2x} &= \frac{6}{-2} e^{-2x} + C \\ y \cdot e^{-2x} &= -3e^{-2x} + C && \mid \cdot e^{2x} \\ y &= -3 + C \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 7

$$\begin{aligned} y' + y &= x && \mid \cdot e^{x} \\ (y \cdot e^{x})' &= x \cdot e^{x} \\ y \cdot e^{x} &= \int x \cdot e^{x} \quad dx \\ y \cdot e^{x} &= xe^{x} - \int e^{x} \ dx \\ y \cdot e^{x} &= xe^{x} - e^{x} + C && \mid \cdot e^{-x} \\ y &= x - 1 + Ce^{-x} \end{aligned}$$

Oppgave 1 - 8

$$
\begin{aligned}
y' - xy &= 6x \qquad\qquad | \cdot e^{\int -x \ dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
(y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2})' &= 6x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} &= \int 6x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \ \ dx \\
y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} &= -6 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \qquad\qquad | \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\
y &= -6 + C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

Oppgave 1 - 9

$$
\begin{aligned}
y' + 2y &= 8x^2 \qquad\qquad | \cdot e^{2x} \\
(y \cdot e^{2x})' &= 8x^2 \cdot e^{2x} \\
y \cdot e^{2x} &= \int 8x^2 \cdot e^{2x} \ dx \\
y \cdot e^{2x} &= 4x^2e^{2x} - 8 \int e^{2x}x \ dx \\
y \cdot e^{2x} &= 4x^2e^{2x} - 4xe^{2x} + 4 \int e^{2x} \ dx \\
y \cdot e^{2x} &= 4x^2e^{2x} - 4xe^{2x} + 2e^{2x} + C \qquad\qquad | \cdot e^{-2x} \\
y &= 4x^2 - 4x + 2 + Ce^{-2x}
\end{aligned}
$$

Oppgave 1 - 10

$$
\begin{aligned}
y' + 2xy &= x \qquad\qquad | \cdot e^{\int 2x \ dx} = e^{x^2} \\
(y \cdot e^{x^2})' &= x \cdot e^{x^2} \\
y \cdot e^{x^2} &= \int x \cdot e^{x^2} \ dx \\
y \cdot e^{x^2} &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C \qquad\qquad | \cdot e^{-x^2} \\
y &= \frac{1}{2} + e^{-x^2}C
\end{aligned}
$$

Diff.likn m/ initialbetingelser

Oppgave 2

Oppgave 2-1

$$y' + 2y = 0 \ , \ y(0) = 2$$

(Løsning av diff.likn. se oppg.1-1)

$$y = C \cdot e^{-2x}$$

$$y(0) = 2 \ : \ 2 = C$$

$$y = 2e^{-2x}$$

Oppgave 2-2

$$y' - 4y = 0 \ , \ y(0) = 10$$

(Løsning av diff.likn. se oppg.1-2)

$$y = Ce^{4x}$$

$$y(0) = 10 \ : \ 10 = C$$

$$y = 10e^{4x}$$

Oppgave 2-3

$$y' + y = 1 \ , \ y(0) = 4$$

(Løsning av diff.likn. se oppg.1-3)

$$y = 1 + C \cdot e^{-x}$$

$$y(0) = 4 \ : \ 4 = 1 + C \to C = 3$$

$$y = 1 + 3e^{-x}$$

Oppgave 2-4

$$\begin{aligned} y' + (\cos x) \cdot y = 0 \ , \ y(0) = 4 \qquad & | \cdot e^{\cos x \ dx} = e^{\sin x} \\ (y \cdot e^{\sin x})' = 0 & \\ y \cdot e^{\sin x} = C & \\ y = Ce^{-\sin x} & \\ y(0) = 4 \ : \ 4 = C & \\ y = 4e^{-\sin x} & \end{aligned}$$

Separable differensiallikninger

Samle alle y og y' i ett ledd.

Oppgave 3

Oppgave 3-1

$$\begin{aligned}
y' + 2xy &= 0 \\
y' &= -2xy \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= -2x \\
\int \frac{1}{y}\ dy &= \int -2x\ dx \\
\ln|y| &= -x^2 + C \\
e^{\ln|y|} &= e^{-x^2+C} && |\ a^{p+q} = a^p \cdot a^q \\
y &= C \cdot e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-2

$$\begin{aligned}
y' + \sin x \cdot y &= 0 \\
y' &= -\sin x \cdot y \\
\int \frac{1}{y}\ dy &= \int -\sin x\ dx \\
\ln y &= \cos x + C \\
y &= Ce^{\cos x}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-3

$$\begin{aligned}
x^2 y' + y &= 0 \\
x^2 y' &= -y \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= -\frac{1}{x^2} \\
\int \frac{1}{y}\ dy &= -\int \frac{1}{x^2}\ dx \\
\ln y &= \frac{1}{x} + C \\
y &= Ce^{(x^{-1})} \\
y &= Ce^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-4

$$\begin{aligned}
xy' &= (x+2)y \\
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{x+2}{x} \\
\int \frac{1}{y}\ dy &= \int \frac{x+2}{x}\ dx \\
\ln y &= x + 2\ln x + C \\
y &= Ce^{x+2\ln x} \\
y &= Ce^{x}\cdot e^{2\ln x} = Ce^{x}\cdot e^{\ln x^2} \\
y &= C\cdot x^2 e^{x}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-5

$$\begin{aligned}
4yy' - e^x &= 0 \\
4yy' &= e^x \\
\int 4y\ dy &= \int e^x\ dx \\
2y^2 &= e^x + C \\
y &= \sqrt{\frac{e^x + C}{2}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-6

$$\begin{aligned}
y' &= 2y(1-\frac{y}{10}) \\
y' &= -\frac{1}{5}y(y-10) \\
\frac{1}{y(y-10)}y' &= -\frac{1}{5} \\
\int \frac{1}{y(y-10)}\ dy &= -\int \frac{1}{5}\ dx \\
\frac{1}{10}(\ln|10-y| - \ln|y|) &= -\frac{1}{5}x + C \\
\ln|\frac{y-10}{y}| &= -2x + C \\
\frac{y-10}{y} &= Ce^{-2x} \\
y - 10 &= yCe^{-2x} \\
y - yCe^{-2x} &= 10 \\
y(1-Ce^{-2x}) &= 10 \\
y &= \frac{10}{1-Ce^{-2x}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3-7

$$
\begin{aligned}
xy &= (-1-x^2)y' \\
\frac{1}{y}y' &= -\frac{x}{x^2+1} \\
\int \frac{1}{y}\, dy &= -\int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\
\ln y &= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \\
\ln y &= \ln(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + C \\
y &= C(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \\
y &= \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} \\
y &= \frac{C\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Praktisk bruk av 1.ordens diff.likn.

Oppgave 4

I et land er folketallet 20 mill., og vokser med 3 % pr. år.

Uten hjelpemidler :

a) Finn folketallet y i millioner etter t år med denne modellen.

b) Hva blir folketallet etter 20 år?

Med hjelpemidler :
Løs de samme oppgavene i CAS, og tegn en graf som viser utviklingen.

Løsningsforslag

y = Antall innbyggere
y' = endring i antall innbyggere

Endring :
INN : $y \cdot 0,03$
UT : 0

Dette gir differensiallikningen :

$$\begin{aligned} y' &= 0,03y \\ y' - 0,03y &= 0 \\ (y \cdot e^{-0,03x})' &= 0 \\ y \cdot e^{-0,03x} &= C \\ y &= C \cdot e^{0,03x} \end{aligned}$$

Initialbetingelsene er at når vi starter (tiden =0) så er det 20 mill. innbyggere (y=20)

$$\begin{aligned} y(0) = 20 : 20 &= C \\ y &= 20 \cdot e^{0,03x} \end{aligned}$$

Etter 20 år vil folketallet være :

$$y(20) = 20 \cdot e^{0,03 \cdot 20}$$

Med retesrente-formelen vil vi få funksjonen :

$$f(x) = 20 \cdot 1,03^x = 20e^{0,03x}$$

som altså gir sammen grafen.

Oppgave 5

I et land er folketallet 20 mill., og vokser med 3 % pr. år.
I tillegg er netto utflytting 120.000 personer pr. år.

Uten hjelpemidler :

a) Finn folketallet y i millioner etter t år med denne modellen.

b) Hva blir nå folketallet etter 20 år?

Med hjelpemidler :
Løs de samme oppgavene i CAS, og tegn en graf som viser utviklingen.

Løsningsforslag

y = Antall innbyggere
y' = endring i antall innbyggere

Endring (vi regner i millioner):
INN : $y \cdot 0,03$
UT : $-0,12$

Dette gir differensiallikningen :

$$\begin{aligned}
y' &= 0,03y - 0,12 \\
y' &= 0,03(y-4) \\
\int \frac{1}{y-4}\ dy &= \int 0,03\ dx \\
\ln|y-4| &= 0,03x + C \\
y - 4 &= Ce^{0,03x} \\
y &= 4 + Ce^{0,03x}
\end{aligned}$$

Initialbetingelsene er at når vi starter (tiden =0) så er det 20 mill. innbyggere (y=20)

$$\begin{aligned}
y(0) = 20\ y &= 4 + Ce^{0,03x} \\
120.000 &= 4 + C \\
C &= 20 - 4 = 16 \\
y &= 4 + 16e^{0,03x}
\end{aligned}$$

Etter 20 år :

$$\begin{aligned}
y(20) &= 4 + 16e^{0,03 \cdot 20} \\
&= 33,15
\end{aligned}$$

Dvs. etter 20 år er folketallet 33,15 millioner

Oppgave 6

En innsjø inneholder 10 000 000 m^3 rent vann. Fra innsjøen renner det ut en elv med vannføring på 10 000 m^3 pr. døgn. Tilsiget er tilsvarende med rent vann, så vannmengden i innsjøen er konstant.
En bedrift slipper ut 2 tonn av et kjemisk stoff i innsjøen. Stoffet fordeler seg jevnt i vannet.

Uten hjelpemidler :

a) Finn et uttrykk for mengden kjemisk stoff i vannet.

b) Hvor lang tid tar før det er mindre enn 0,5 tonn gift i vannet?

c) Løs de samme oppgavene i CAS og tegn en grafisk framstilling av utviklingen.

Løsningsforslag

y = Giftmengde i kg
y' = endring i giftmengde

Endring :
INN : 0
UT : $y/10.000.000 \cdot 10.000 = y/1000 = 0,001y$, (kg/$m^3 \cdot m^3$/døgn gir kg/døgn)

Dette gir oss :

$$y' = -0,001y$$
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -0,001\, dx$$
$$\ln y = -0,001x + C$$
$$y = C \cdot e^{-0,001x}$$

Initialbetingelser : y(0)=2000 (kg)

$$y(0) = 2000: \; y = C \cdot e^{-0,001x}$$
$$C = 2000$$
$$y = 2000 \cdot e^{-0,001x}$$

$$2000 \cdot e^{-0,001x} = 500$$
$$x = 1386$$

Dvs. 1386 døgn, som gir 3,8 år før giftmengden er under 0,5 tonn.

Oppgave 7

En beholder inneholder i utgangspunktet 200 liter rent vann. Det renner ut 2 liter pr. minutt, og det renner inn 2 liter pr. minutt. Vannet som renner inn inneholder 5 gram salt pr. liter.

Uten hjelpemidler :

a) Sett opp et uttrykk for saltmengden i vannet. Vi kaller den totale saltmengden for y

b) Hva vil skje over tid?

c) Løs oppgaven i CAS og lag en grafisk framstilling av utviklignen.

Løsningsforslag

y = saltmengde (i gram)
y' = endring i samtmengde

INN : 5 g/ltr. , 2 ltr /min. gir 10 g/min
UT : y/200 g/ltr. , 2 ltr/min gir $\frac{2y}{200} = \frac{y}{100}$ g/min
Dette gir oss :

$$y' = 10 - \frac{y}{100}$$
$$y' = -0,01(y - 1000)$$
$$y = 1000 + C \cdot e^{-0,01x}$$

Initialbetingelser :

$$y(0) = 0 : \ C = -1000$$
$$y = 1000 - 1000e^{-0,01x}$$

Over tid vil saltmengden stabilisere seg på 5 g/l , altså totalt 1000 g=1 kg
da er saltmengden i vannet som renner ut det samme som det som renner inn.

Oppgave 8

En kommune har 6500 innbyggere. Befolkningen øker ved fødsler 1,2 % pr år , og minker ved dødsfall 1,9 % pr.år. Netto fraflytting er 25 personer pr. år.

a) Finn et uttrykk for befolkningen i kommunen.

b) Hva er befolkningen etter 10 år?

Løsningsforslag

y= antall innbyggere
y'= endring i antall innbyggere

INN : 0,012y
UT : 0,019y + 25

Dette gir oss :

$$\begin{aligned} y' &= 0,012y - 0,19y - 25 \\ y' &= -0,07y - 25 \\ y &= C \cdot e^{-0,07x} - 357 \end{aligned}$$

Initialbetingelser : $y(0) = 6500$

$$\begin{aligned} y(0) = 6500 : \ 6500 &= C - 357 \\ C &= 6857 \\ y &= 6857 \cdot e^{-0,07x} - 357 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(10) &= 6857 \cdot e^{-0,07 \cdot 10} - 357 \\ x &= 1334 \end{aligned}$$

Dvs. etter 20 år vil det være 1334 innbyggere dersom denne utviklingen fortsetter.

Oppgave 9

En bakteriekultur inneholder 10 000 bakterier. Vekstfarten målt i bakterier pr. time er 20%.

a) Finn et funksjonsuttrykk som viser antall bakterier etter t timer.

b) Vekstfarten avtar gradvis når antall bakterier nærmer seg 100 000. Bakterieantallet etter t timer = y. Finn et funksjonsuttrykk som viser antall bakterier etter t timer.

Løsningsforslag

y= antall bakterier
y'= endring i antall bakterier

INN : $y \cdot 0,20$
UT : 0

Det gir oss :

$$\begin{aligned} y' &= 0,2y \\ \ln y &= 0,2x + C \\ y &= C \cdot e^{0,2x} \\ y(0) = 10.000: \ y &= 10000e^{0,2x} \end{aligned}$$

For å få antallet til å avta gradvis får vi diff.likningen :

$$\begin{aligned} y' &= 0,2y(1 - \frac{y}{100000}) \\ y &= -\frac{100000}{C \cdot e^{-0,2x} - 1} \\ y(0) = 10000: \ y &= \frac{100000}{9e^{-0,2x} - 1} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Antall harer på et område er 10 stk. Utviklingen følger en logistisk modell. Bæreevnen er 500 individer og proporsjonalitetskonstanten er k=0,0001. N(t) er antall harer etter t år.
Endringen i antall :

$$N'(t) = 0,0001N(500 - N)$$

a) Finn en funksjon som viser utviklingen i harepopulasjonen.

b) Hvor mange harer er det etter 10 år?

Løsningsforslag

y= antall harer
y'= endring i antall harer

Da får vi

$$\begin{aligned} y' &= 0,0001y(500 - y) \\ \int \frac{y}{y - 500}\ dy &= \int -0,0001\ dx \\ y &= C \cdot e^{-0,0001x} + 500 \\ y(0) = 10 : 10 &= C + 500 \\ C &= 490 \\ y &= 490 \cdot e^{-0,0001x} + 500 \end{aligned}$$