Arbeidshefte
1.ordens differensiallikninger

Integrerende faktor :

$$
\begin{aligned}
y' + ay &= b \qquad | \cdot e^{\int a \ dx} \\
y' \cdot e^{\int a \ dx} + y \cdot a \cdot e^{\int a \ dx} &= b \cdot e^{\int a \ dx} \\
(y \cdot e^{\int a \ dx})' &= b \cdot e^{\int a \ dx} \\
\int (y \cdot e^{\int a \ dx})' \ dx &= \int b \cdot e^{\int a \ dx} \ dx \\
y \cdot e^{\int a \ dx} &= \int b \cdot e^{\int a \ dx} \ dx
\end{aligned}
$$

Separable diff.likn. :

$$
\begin{aligned}
y' &= a \cdot y \\
\frac{1}{y} \ y' &= a \\
\int \frac{1}{y} \ dy &= \int a \ dx
\end{aligned}
$$

1.ordens differensialliknigner - integrerende faktor

Integrerende faktor :

$$\begin{aligned} y' + ay &= b \qquad | \cdot e^{\int a \ dx} \\ y' \cdot e^{\int a \ dx} + y \cdot a \cdot e^{\int a \ dx} &= b \cdot e^{\int a \ dx} \\ (y \cdot e^{\int a \ dx})' &= b \cdot e^{\int a \ dx} \\ \int (y \cdot e^{\int a \ dx})' \ dx &= \int b \cdot e^{\int a \ dx} \ dx \\ y \cdot e^{\int a \ dx} &= \int b \cdot e^{\int a \ dx} \ dx \end{aligned}$$

Oppgave 1

1) $y' + 2y = 0$

2) $y' - 4y = 0$

3) $y' + y = 1$

4) $y' + 0,001y = 0$

5) $4y' + 12y = 0$

6) $y' - 2y = 6$

7) $y' + y = x$

8) $y' - xy = 6x$

9) $y' + 2y = 8x^2$

10) $y' + 2xy = x$

Diff.likn m/ initialbetingelser

Oppgave 2

Finn verdien til C ved å sette inn for (x, y)

1) $y' + 2y = 0 \ , \ y(0) = 2$

2) $y' - 4y = 0 \ , \ y(0) = 10$

3) $y' + y = 1 \ , \ y(0) = 4$

4) $y' + (\cos x) \cdot y = 0 \ , \ y(0) = 4$

Separable differensiallikninger

Separable diff.likn. :

$$y' = a \cdot y$$
$$\frac{1}{y}\, y' = a$$
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a\, dx$$

Oppgave 3

1) $y' + 2xy = 0$

2) $y' + \sin x \cdot y = 0$

3) $x^2 y' + y = 0$

4) $xy' = (x+2)y$

5) $4yy' - e^x = 0$

6) $y' = 2y(1 - \frac{y}{10})$

7) $xy = (-1 - x^2)y'$

Praktisk bruk av 1.ordens diff.likn.

Oppgave 4

I et land er folketallet 20 mill., og vokser med 3 % pr. år.

Uten hjelpemidler :

a) Finn folketallet y i millioner etter t år med denne modellen.

b) Hva blir folketallet etter 20 år?

Med hjelpemidler :
Løs de samme oppgavene i CAS, og tegn en graf som viser utviklingen.

Oppgave 5

I et land er folketallet 20 mill., og vokser med 3 % pr. år.
I tillegg er netto utflytting 120.000 personer pr. år.

Uten hjelpemidler :

a) Finn folketallet y i millioner etter t år med denne modellen.

b) Hva blir nå folketallet etter 20 år?

Med hjelpemidler :
Løs de samme oppgavene i CAS, og tegn en graf som viser utviklingen.

Oppgave 6

En innsjø inneholder 10 000 000 m^3 rent vann. Fra innsjøen renner det ut en elv med vannføring på 10 000 m^3 pr. døgn. Tilsiget er tilsvarende med rent vann, så vannmengden i innsjøen er konstant.
En bedrift slipper ut 2 tonn av et kjemisk stoff i innsjøen. Stoffet fordeler seg jevnt i vannet.

Uten hjelpemidler :

a) Finn et uttrykk for mengden kjemisk stoff i vannet.

b) Hvor lang tid tar før det er mindre enn 0,5 tonn gift i vannet?

c) Løs de samme oppgavene i CAS og tegn en grafisk framstilling av utviklingen.

Oppgave 7

En beholder inneholder i utgangspunktet 200 liter rent vann. Det renner ut 2 liter pr. minutt, og det renner inn 2 liter pr. minutt. Vannet som renner inn inneholder 5 gram salt pr. liter. Vi kaller den totale saltmengden for y.

Uten hjelpemidler :

a) Sett opp et uttrykk for endringen av saltmengden i vannet.

b) Løs differensiallikningen og finn et uttrykk sfr saltmengden.

c) Hva vil skje over tid?

d) Løs oppgaven i CAS og lag en grafisk framstilling av utviklignen.

Oppgave 8

En kommune har 6500 innbyggere. Befolkningen øker ved fødsler 1,2 % pr år , og minker ved dødsfall 1,9 % pr.år. Netto fraflytting er 25 personer pr. år.

a) Finn et uttrykk for befolkningen i kommunen.

b) Hva er befolkningen etter 10 år?

Oppgave 9

En bakteriekultur inneholder 10 000 bakterier. Vekstfarten målt i bakterier pr. time er 20%.

a) Finn et funksjonsuttrykk som viser antall bakterier etter t timer.

b) Vekstfarten avtar gradvis når antall bakterier nærmer seg 100 000. Bakterieantallet etter t timer = y. Finn et funksjonsuttrykk som viser antall bakterier etter t timer.

Oppgave 10

Antall harer på et område er 10 stk, utviklingen av antall harer følger en logistisk modell. Bæreevnen er 500 individer og proporsjonalitetskonstanten er k=0,0001. N(t) er antall harer etter t år.
Endringen i antall :

$$N'(t) = 0,0001N(500 - N)$$

a) Finn en funksjon som viser utviklingen i harepopulasjonen.

b) Hvor mange harer er det etter 10 år?