

Arbeidshefte

2.ordens differensiallikninger

Løsningsforslag

2.ordens differensiallikn. - 2 løsninger

Oppgave 1

1)

$$\begin{aligned}y'' - y' - 2y &= 0 \\r^2 - r - 2 &= 0 \\(r - 2)(r + 1) &= 0 \\r_1 = 2 \vee r_2 &= -1 \\y &= Ce^{2x} + De^{-x}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}y'' - 7y' + 12y &= 0 \\r^2 - 7r + 12 &= 0 \\(r - 3)(r - 4) &= 0 \\r_1 = 3 \vee r_2 &= 4 \\y &= Ce^{3x} + De^{4x}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}y'' + y' - 6y &= 0 \\r^2 + r - 6 &= 0 \\(r + 3)(r - 2) &= 0 \\r_1 = -3 \vee r_2 &= 2 \\y &= Ce^{-3x} + De^{2x}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}y'' - y' - 12y &= 0 \\r^2 - r - 12 &= 0 \\(r - 4)(r + 3) &= 0 \\r_1 = 4 \vee r_2 &= -3 \\y &= Ce^{4x} + De^{-3x}\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}y'' - 2y' - 3y &= 0 \\r^2 - 2r - 3 &= 0 \\(r - 3)(r + 1) &= 0 \\r_1 = 3 \vee r_2 &= -1 \\y &= Ce^{3x} + De^{-x}\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}y'' - 9y &= 0 \\r^2 - 9 &= 0 \\(r - 3)(r + 3) &= 0 \\r_1 = 3 \vee r_2 &= -3 \\y &= Ce^{3x} + De^{-3x}\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}y'' - 4y &= 0 \\r^2 - 4 &= 0 \\(r - 2)(r + 2) &= 0 \\r_1 = 2 \vee r_2 &= -2 \\y &= Ce^{2x} + De^{-2x}\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}3y'' + 6y' &= 0 \\y'' + 2y' &= 0 \\r^2 + 2r &= 0 \\r(r + 2) &= 0 \\r_1 = 0 \vee r_2 &= -2 \\y &= Ce^0 + De^{-2x} \\y &= C + De^{-2x}\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}y'' - k^2y &= 0 \\r^2 - k^2 &= 0 \\(r - k)(r + k) &= 0 \\r_1 = k \vee r_2 &= -k \\y &= Ce^{kx} + De^{-kx}\end{aligned}$$

2.ordens differensiallikn. - 1 løsning

Likningen gir 1 løsning : $y = (C + Dx)e^{rx}$

Oppgave 2

1)

$$\begin{aligned}y'' - 6y' + 9y &= 0 \\r^2 - 6r + 9 &= 0 \\(r - 3)^2 &= 0 \\r &= 3 \\y &= (C + Dx)e^{3x}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}y'' + 4y' + 4y &= 0 \\r^2 + 4r + 4 &= 0 \\(r + 2)^2 &= 0 \\r &= -2 \\y &= (C + Dx)e^{-2x}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}y'' - 10y' + 25y &= 0 \\r^2 - 10r + 25 &= 0 \\(r - 5)^2 &= 0 \\r &= 5 \\y &= (C + Dx)e^{5x}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + y &= 0 \\r^2 - 2r + 1 &= 0 \\(r - 1)^2 &= 0 \\r &= 1 \\y &= (C + Dx)e^x\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}y'' + 6y' + 9y &= 0 \\r^2 + 6r + 9 &= 0 \\(r + 3)^2 &= 0 \\r &= -3 \\y &= (C + Dx)e^{-3x}\end{aligned}$$

6)

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

$$r^2 + 8r + 16 = 0$$

$$(r + 4)^2 = 0$$

$$r = -4$$

$$y = (C + Dx)e^{-4x}$$

2.ordens differensiallikn. - kompleks løsning

Likningen gir kompleks løsning : $r = p \pm q\sqrt{-1}$, $y = e^{px}(C \sin(qx) + D \cos(qx))$

Oppgave 3

1)

$$y'' + y' + y = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + D \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

2)

$$y'' + 9y = 0$$

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r = \frac{\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$r = \pm 3i$$

$$y = e^0(C \sin(3x) + D \cos(3x))$$

$$y = C \sin(3x) + D \cos(3x)$$

3)

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$r = -1 \pm 2i$$

$$y = e^{-x}(C \sin(2x) + D \cos(2x))$$

4)

$$y'' + k^2y = 0$$

$$r^2 + k^2 = 0$$

$$r = \frac{\pm\sqrt{-4k^2}}{2}$$

$$r = \frac{\pm 2k\sqrt{-1}}{2}$$

$$r = \pm ki$$

$$y = C \sin(kx) + D \cos(kx)$$

5)

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$r = 1 \pm 2i$$

$$y = e^x(C \sin(2x) + D \cos(2x))$$

6)

$$0,5y'' + 0,5y' + 3,25y = 0$$

$$y'' + y' + 6,5y = 0$$

$$r^2 + r + 6,5 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-25}}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}i$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C \sin(\frac{5}{2}x) + D \cos(\frac{5}{2}x))$$

Praktisk bruk

Oppgave 4

En kule med masse $m=100$ g blir kastet rett nedover med en utgangsfart på 2 m/s. Vi regner med luftmotstand $L=0,01v$, denne virker i motsatt retning. Finn et uttrykk for farten, og finn farten etter 2 sekunder.

Løsningsforslag

$$\begin{aligned}m &= 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg} \\v_0 &= 2 \text{ m/s} \\g &= 10 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\mg - L &= ma \\10m - 0,01v &= mv' \\v' + \frac{0,01}{0,1}v &= 10 \\v' &= 10 - 0,1v \\v' &= -0,1(v + 100) \\ \int \frac{1}{v + 100} dv &= \int -0,1 dt \\ \ln |v + 100| &= -0,1t + C \\ e^{\ln |v+100|} &= e^{-0,01t+C} \\ v + 100 &= C \cdot e^{-0,1t} \\ v &= -100 + C \cdot e^{-0,1t} \\ v(0) = 2 : 2 &= -100 + C \Rightarrow C = 102 \\ v(t) &= -100 + 102e^{-0,1t}\end{aligned}$$

Farten etter 2 sekunder :

$$v(2) = -100 + 102e^{-0,1 \cdot 2} = \dots$$

Oppgave 5

$$my'' + qy' + ky = 0$$

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Et lodd med massen 0,50 kg henger i en fjær med fjærstivheten (fjærkonstanten) $k=3,25$ N/m. Dempningsfaktoren er $q=0,5$ Ns/m. Ved tiden $t=0$ er loddet i ro ved $y=0,4$ m. Finn et uttrykk for loddets bevegelse, g lag en skisse av grafen.

Løsningsforslag

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

$$y'' + \frac{0,5}{0,5}y' + \frac{3,25}{0,5}y = 0$$

$$y'' + y' + 6,5y = 0$$

$$r^2 + r + 6,5 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 26}}{2}$$

$$r = \frac{-1 \pm 5i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}i$$

$$r = -0,5 \pm 2,5i$$

$$y = e^{-0,5x}(A \sin(2,5t) + B \cos(2,5t))$$

Initialbetingelser :

$$y(0) = 0,4: 0,4 = e^{-0,5 \cdot 0}(A \sin(2,5 \cdot 0) + B \cos(2,5 \cdot 0))$$

$$0,4 = 1 \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1) \Rightarrow B = 0,4$$

$$y'(t) = -e^{-0,5x}(A \sin(2,5t) + B \cos(2,5t)) + e^{-0,5x}(2,5A \cos(2,5t) + 2,5B \sin(2,5t))$$

$$y'(0) = 0 ::$$

$$0 = -0,5e^{-0,5 \cdot 0}(A \sin(2,5 \cdot 0) + B \cos(2,5 \cdot 0)) + e^{-0,5 \cdot 0}(2,5A \cos(2,5 \cdot 0) + 2,5B \sin(2,5 \cdot 0))$$

$$0 = 0,5 \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1) + 1 \cdot (2,5A \cdot 1 + 2,5B \cdot 0)$$

$$0 = 0,5 \cdot B + 2,4A$$

$$0 = 0,5 \cdot 0,4 + 2,4A \Rightarrow A = \frac{0,2}{2,4} = 0,08$$

$$y = e^{-0,5x}(0,08 \sin(2,5t) + 0,4 \cos(2,5t))$$

Oppgave 6

En kule med masse $m=0,16$ kg henger i en fjær med fjærstivheten $D=4,8$ N/m. Utslaget fra likevektsstillingen er $y(t)$ og har positiv retning nedover. Til å begynne med er kula i likevektsstilling, men får en dytt i positiv retning med farten $0,6$ m/s.

1. Sett opp svingelikningen og løs den (uten demping , $q=0$)
2. Finn uttrykket for utslaget $y(t)$ m etter t s.
3. Finn svingetida T ved denne bevegelsen.

Løsningsforslag

Svingelikningen gir oss :

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\ -Dy &= ma \\ m \cdot y'' + Dy &= 0 \\ y'' + \frac{4,8}{0,16} &= 0 \\ y'' + 30y &= 0 \\ y &= A \cdot \sin(\sqrt{30}t) + B \cdot \cos(\sqrt{30}t)\end{aligned}$$

Initialbetingelsene er :

$$\begin{aligned}y(0) = 0 : 0 &= B \cdot 1, B = 0, y = A \cdot \sin(\sqrt{30}t) \\ y'(0) = v(0) = 0,6 : 0,6 &= A \cdot 30, A = 0,11\end{aligned}$$

$$y(t) = 0,11 \cdot \sin(\sqrt{30}t)$$

$$\text{Svingetida (perioden) : } T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\sqrt{30}} = 1,15$$

Oppgave 7

$$my'' + qy' + Dy = 0$$
$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{D}{m}y = 0$$

Et lodd med masse $m=0,75$ kg svinger i en fjær med fjærstivheten $3,75$ N/m. Dempningsfaktoren er $q=0,6$ Ns/m. Når tiden $t=0$, er legemet i ro ved $y=0,5$ m.

1. Sett opp differensiallikningen og løs den generelt
2. Finn utslaget $y(t)$ som en funksjon av tida.
3. Skisser grafen for $t \in [0, 5]$
4. Hva blir svingetida, dvs tida mellom to maksimumsverdier.

Løsningsforslag

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{D}{m}y = 0$$
$$y'' + \frac{0,6}{0,75}y' + \frac{3,75}{0,75}y = 0$$
$$y'' + 0,8y' + 5 = 0$$

Karakteristisk likning :

$$r^2 + 0,8r + 5 = 0$$
$$r = \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 4 \cdot 5}}{2}$$
$$r = -0,4 \pm 2,2i$$

$$y(t) = e^{-0,4t}(A \sin 2,2t + B \cos 2,2t)$$

$$y'(t) = -0,4e^{-0,4t}(A \sin 2,2t + B \cos 2,2t) + e^{-0,4t}(2,2A \cos 2,2t - 2,2B \sin 2,2t)$$

$$y(0) = 0,5 : 0,5 = B$$

$$y'(0) = 0 : 0 = -0,4B + 2,2A \Rightarrow A = \frac{0,4 \cdot 0,5}{2,2} = 0,091$$

$$y(t) = e^{-0,4t}(0,091 \sin 2,2t + 0,5 \cos 2,2t)$$

$$\text{Svingetida } T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2,2} = 2,86$$

Oppgave 8

Pendel :

$$\phi'' + \frac{q}{m}\phi' + \frac{g}{l}\phi = 0$$

En pendel med lengden $l=2,4$ m og masse $m=1,8$ kg beveger seg i en seig masse der $q=10$. Ved tida $t=0$ er utslaget $\phi = 0,5$. Legemet er da i ro slik at $\phi'(0) = 0$

- 1) Sett opp likningen og løs den.
- 2) Finn utslaget som en funksjon av tida.
- 3) Tegn en skisse av grafen og kommenter resultatet.

Løsningsforslag

$$\phi'' + \frac{10}{1,8}\phi' + \frac{9,81}{2,4}\phi = 0$$

$$\phi'' + 5,56\phi' + 4,09\phi = 0$$

$$\phi(t) = A \cdot e^{-0,87t} + B \cdot e^{-4,69t}$$

$$\phi'(t) = -0,87Ae^{-0,87t} - 4,69Be^{-4,69t}$$

$$\phi(0) = 0,5$$

$$\phi'(0) = 0$$

$$\phi(t) = 0,61 \cdot e^{-0,87t} - 0,11e^{-4,69t}$$

Dette er en overdempet svingning.