

Arbeidshefte

2.ordens differensiallikninger

Strekning :

$$s(t)$$

Fart :

$$v(t) = s'(t)$$

Akselerasjon :

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Newtons 2.lov :

Summen av kreftene som virker på et legeme, er lik massen multiplisert med akselerasjonen.

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Karakteristisk likning :

$$ar^2 + br + c$$

Løses som 2.gradslikning:

Likningen gir 2 løsninger : $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$

Likningen gir 1 løsning : $y = (C + Dx)e^{rx}$

Likningen gir kompleks løsning : $r = p \pm q\sqrt{-1}$, $y = e^{px}(C \sin(qx) + D \cos(qx))$

2.ordens differensiallikn. - 2 løsninger

Likningen gir 2 løsninger : $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$

Oppgave 1

1) $y'' - y' - 2y = 0$

2) $y'' - 7y' + 12y = 0$

3) $y'' + y' - 6y = 0$

4) $y'' - y' - 12y = 0$

$$5) y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$6) y'' - 9y = 0$$

$$7) y'' - 4y = 0$$

$$8) 3y'' + 6y' = 0$$

$$9) y'' - k^2y = 0$$

2.ordens differensiallikn. - 1 løsning

Likningen gir 1 løsning : $y = (C + Dx)e^{rx}$

Oppgave 2

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

3) $y'' - 10y' + 25y = 0$

4) $y'' - 2y' + y = 0$

5) $y'' + 6y' + 9y = 0$

6) $y'' + 8y' = -16y$

2.ordens differensiallikn. - kompleks løsning

Likningen gir kompleks løsning : $r = p \pm q\sqrt{-1}$, $y = e^{px}(C \sin(qx) + D \cos(qx))$

Oppgave 3

1) $y'' + y' + y = 0$

2) $y'' + 9y = 0$

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

4. $y'' + k^2y = 0$

5. $y'' - 2y' + 5y = 0$

6. $0,5y'' = -0,5y' - 3,25y$

7. $y'' + 0,8y' + 1,16y = 0$

Praktisk bruk

Oppgave 4

En kule med masse $m=100$ g blir kastet rett nedover med en utgangsfart på 2 m/s. Vi regner med luftmotstand $L=0,01v$, denne virker i motsatt retning. Finn et uttrykk for farten, og finn farten etter 2 sekunder.

Oppgave 5

$$my'' + qy' + ky = 0$$
$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Et lodd med massen 0,50 kg henger i en fjær med fjærstivheten (fjærkonstanten) $k=3,25$ N/m. Dempningsfaktoren er $q=0,5$ Ns/m. Ved tiden $t=0$ er loddet i ro ved $y=0,4$ m. Finn et uttrykk for loddets bevegelse.

Oppgave 6

En kule med masse $m=0,16$ kg henger i en fjær med fjærstivheten $D=4,8$ N/m. Utslaget fra likevektsstillingen er $y(t)$ og har positiv retning nedover. Til å begynne med er kula i likevektsstilling, men får en dytt i positiv retning med farten $0,6$ m/s.

- 1) Sett opp svingelikningen og løs den
- 2) Finn uttrykket for utslaget $y(t)$ m etter t s.
- 3) Finn svingetida T ved denne benegelsen.

Oppgave 7

$$my'' + qy' + Dy = 0$$

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{D}{m}y = 0$$

Et lodd med masse $m=0,75$ kg svinger i en fjær med fjærstivheten $3,75$ N/m. Dempningsfaktoren er $q=0,6$ Ns/m. Når tiden $t=0$, er legemet i ro ved $y=0,5$ m.

- 1) Sett opp differensiallikningen og løs den generelt
- 2) Finn utslaget $y(t)$ som en funksjon av tida.
- 3) Skisser grafen for $t \in [0, 5]$
- 4) Hva bblir svingetida, dvs tida mellom to maksimumsverdier.

Oppgave 8

Pendel :

$$\phi'' + \frac{q}{m}\phi' + \frac{g}{l}\phi = 0$$

En pendel med lengden $l=2,4$ m og masse $m=1,8$ kg beveger seg i en seig masse der $q=10$. Ved tida $t=0$ er utslaget $\phi = 0,5$. Legemet er da i ro slik at $\phi'(0) = 0$

- 1) Sett opp likningen og løs den.
- 2) Finn utslaget som en funksjon av tida.
- 3) Tegn en skisse av grafen og kommenter resultatet.