Algebra

Regneregler

Addisjon : $a + b = c$ ledd+ledd=sum
Subtraksjon : $a - b = c$ ledd-ledd=differanse
Multiplikasjon : $a \cdot b = c$ faktor· faktor=produkt
Divisjon : $a : b = \frac{a}{b} = c$ $\frac{\text{divident}}{\text{divisor}}$ =kvotient

Regnerekkefølge

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplisere/ dividere (Gange / dele)
4. Addere / subtrahere (Pluss / minus)

Pass på minustegnet!!

$(-2) \cdot (-3) = 6$ $-(2+3) = -5$
$-(2-3) = -(-1) = 1$

Bokstavregning

$a + a = 2a$
$a \cdot a = a^2$
$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Prosentregning

Prosent = hundredel

1% av 100 er 1

Rentesrenteformelen :
$K_n = K_0 \cdot VF^n$

$VF = 1 \pm \frac{p}{100}$

Proporsjonalitet

Proporsjonale : $a = k \cdot b$
Omvendt proporsjonale : $a = \frac{k}{b}$

Brøk

Addisjon / subtraksjon - Fellesnevner

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Multiplikasjon - "teller · teller , nevner · nevner"

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Divisjon - "Snu bakerste brøken og multiplisere"

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Faktorisering av tall

Faktorisering av tall = Primtallsfaktorisering, dvs. dele opp tall i primtallsfaktorer.
F.eks. : $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Primtall

Vi kan dele opp de fleste tall i flere faktorer (faktoriseres) , f.eks. $6 = 2 \cdot 3$
De tallene som ikke kan faktoriseres kalles primtall.
Primtall : $1 - 2 - 3 - 5 - 7 -$ ..... Det finnes uendelig mange primtall.

Faktorisering av uttrykk

Et uttrykk som består av ledd kan faktoriseres dersom leddene inneholder samme faktor.

$$ab + 2a = a \cdot b + 2 \cdot a = a(b+2)$$
$$2x + 4 = 2 \cdot x + 2 \cdot 2 = 2(x+2)$$
$$x^2 + 2x = x \cdot x + 2 \cdot x = x(x+2)$$

Forkorting av uttrykk

Et uttrykk som består av lik faktor i teller og nevner (over og under brøkstreken) kan forkortes.
NB! Ledd kan ikke forkortes!!

$$\begin{aligned}\frac{2x+2}{x^2+x} &= \frac{2 \cdot x + 2 \cdot 1}{x \cdot x + x \cdot 1} \\ &= \frac{2\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}} \\ &= \frac{2}{x}\end{aligned}$$

Trekke sammen uttrykk med flere ledd

På samme måte som når vi legger sammen brøk, må vi ha fellesnevner når vi legger sammen uttrykk.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)} &= \frac{1 \cdot (x+2)}{(x+1) \cdot (x+2)} + \frac{1 \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+1)} \\ &= \frac{(x+2) + (x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x+2+x+1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Kvadratsetningene

Kvadratsetningene kan brukes til å løse opp parenteser og til å faktorisere uttrykk.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Fullstendige kvadrater

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$= (x + \frac{b}{2})^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Potenser

$a^n = a \cdot a \cdot a....$, n ganger

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot a^q$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

$a^0 = 1$

Røtter

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Standardform

$a \cdot 10^n$, der a er et tall mellom 1 og 10

$2500000 = 2,5 \cdot 10^6$
$0,00045 = 4,5 \cdot 10^{-4}$

Likninger

En likning er matematiske uttrykk satt sammen med et likhetstegn.

En likning er sann for en eller flere verdier av x.

En identitet er sann for alle verdier av x.

Grunnregel for likninger :
Vi kan gjøre ' hva vi vil ' så lenge vi gjør det samme på begge sider av likhetstegnet.

$$x + 2 = 3$$
$$x + 2 - \mathbf{2} = 3 - \mathbf{2}$$
$$x = 1$$

Obs! dersom vi tar kvadratroten må vi huske på at vi får både positivt og negativt svar.

$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$
$$x = -2 \vee x = 2$$

Produktregel :

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Likninger- 2.grads

abc-formelen

abc-formelen brukes til å løse 2.gradslikninger, og vi kan bruke reultatet til å faktorisere 2.gradsuttrykk.
Løse likningen :

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = x_1 \vee x = x_2$$

Bruke svarene til å faktorisere (nullpunktsfaktorisering)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Produktmetoden

$x^2 + b \cdot x + c$
Vi kan faktorisere dette dersom vi finner 2 tall (s og t) slik at: $s + t = b$ og $s \cdot t = c$

$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, fordi $1 + 2 = 3$, og $1 \cdot 2 = 2$

Eksempel

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x &= \frac{-3 + 1}{2} \vee \frac{-3 - 1}{2} \\ x &= -1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Polynomdivisjon

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$

$f(x)$ har nullpunkter i $x \in \{-2, -1, 1\}$

For å faktorisere tredjegradspolynomer kan vi dividere med én av faktorene.

Eksempel

Faktorisere 3.gradsuttrykk : $x^3 - 4x^2 + x + 6$
Finne et nullpunkt : $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$

$P(2) = 0$, da er $x = 2$ et nullpunkt, og en av faktorene er $(x - 2)$.
Da kan vi dele med $(x - 2)$

$$\begin{array}{l} \big(\; x^3 - 4x^2 \;\; + x + 6\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 2x - 3 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad -\,2x^2 \;\; + x \\ \qquad \underline{\;\;2x^2 - 4x} \\ \qquad\qquad -\,3x + 6 \\ \qquad\qquad \underline{\;\;\;3x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Så kan vi faktorisere 2.gradsuttrykket.
$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 2)$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)$

Likningsett

Likninger med flere ukjente.

Innsettingsmetoden

$$\begin{aligned} I: &\quad x + y = -1 \\ II: &\quad 2x + y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: &\quad x = -1 - y \\ II: &\quad 2(-1 - y) + y = 1 \\ &\quad -2 - 2y + y = 1 \\ &\quad y = -3 \\ &\quad x = -1 - (-3) \\ &\quad x = 2 \end{aligned}$$

Addisjonsmetoden

$$\begin{aligned} I: &\quad x + y = -1 \\ II: &\quad 2x + y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: &\quad -x - y = 1 \\ II: &\quad 2x + y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I + II: &\quad x = 2 \\ I: &\quad 2 + y = -1 \\ &\quad y = -3 \end{aligned}$$

Ulikheter

Samme regler som for likninger.
OBS! Dersom vi multipliserer eller divederer på et nagetivt tall må ulikhetstegnet snus.

Eksempel

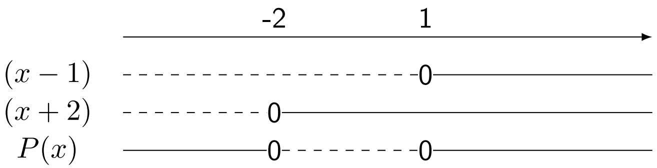
$$
\begin{aligned}
2x - 1 &> x - 1 \\
2x - x &> -1 + 1 \\
x &> 0
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x - 3 &> 2x - 5 \\
x - 2x &> -5 + 3 \\
-x &> -2 \\
x &< 2
\end{aligned}
$$

Eksempel - 2.grads

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &< 2 \\
x^2 + x - 2 &< 0 \\
(x+2)(x-1) &< 0
\end{aligned}
$$



$$x \in \left\langle -2, 1 \right\rangle$$

Logaritmer - Briggske

$$
\begin{aligned}
\lg 10 &= 1 \\
\lg 1 &= 0 \\
10^{\lg a} &= a \\
\lg 10^a &= a \\
\lg a^b &= b \cdot \lg a \\
\lg(a \cdot b) &= \lg a + \lg b \\
\lg\left(\frac{a}{b}\right) &= \lg a - \lg b
\end{aligned}
$$

Eksempel

$\lg(a \cdot b) + \lg \frac{a}{b} = \lg a + \lg b + \lg a - \lg b = 2\lg a$

Logaritmer - Naturlige

$$
\begin{aligned}
\ln e &= 1 \\
\ln 1 &= 0 \\
e^{\ln a} &= a \\
\ln e^a &= a \\
\ln a^b &= b \cdot \ln a \\
\ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b \\
\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b
\end{aligned}
$$

Eksempel

$\ln a^2 + \ln \frac{1}{a} = 2\ln a + \ln 1 - \ln a = \ln a$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
2\ln x &= 4 \\
\ln x &= 2 \\
e^{\ln x} &= e^2 \\
x &= e^2
\end{aligned}
$$

Eulers konstant

$$e \approx 2.71828...$$

$$e = \lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}}$$

Funksjoner

D_f : definisjonsmengden til funksjonen f er alle x-verider vi kan velge for x.
V_f : verdimengden til funksjonen er alle funksjonsverdiene (y-verdiene) vi får for alle x-verdier i D_f-

$f(x)$ er den fysiske funksjonen.

- $f(x) = 0 \rightarrow$ nullpunktene.
- $f(x) > 0 \rightarrow$ grafen ligger over x-aksen, dvs. har positive y-verdier.
- $f(x) < 0 \rightarrow$ grafen ligger under x-aksen, dvs. har negative y-verdier.

$f'(x)$ er veksten til funksjonen.

- $f'(x) = 0 \rightarrow$ ekstremalpunkter, topp-/bunn-/terrassepunkt.
- $f'(x) > 0 \rightarrow$ grafen stiger.
- $f'(x) < 0 \rightarrow$ grafen synker.

$f''(x)$ er krumningen til funksjonen.

- $f''(x) = 0 \rightarrow$ vendepunkt.
- $f''(x) > 0 \rightarrow$ grafen er konveks, hul side opp, smiler".
- $f''(x) < 0 \rightarrow$ grafen er konkav, hul side ned, sur".

Gjennomsnittlig vekst

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

En rett linje har konstant vekst.

Momentan vekst

Veksten i et punkt på en graf er lik stigningstallet til tangenten i punktet.
Dette stigningstallet kan vi finne ved å derivere.

$f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Grenseverdier

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0} = \infty$

Grenseverdisetningene

$\lim f(x) \pm g(x) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

Derivasjon

Definisjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En funksjon har et stasjonært punkt dersom $f'(x) = 0$, dvs. veksten er null.
Stasjonært punkt kan være ekstremalpunkt (topp/bunn) eller et terrassepunkt.

Regler

$a \cdot x^n = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

$(a)' = 0$

$(a \cdot x)' = a$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerneregel : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Polynomfunksjoner

1.grads - Lineær funksjon

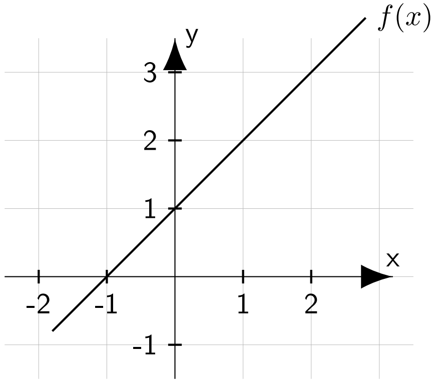
$$f(x) = ax + b = a(x - x_1)$$

Nullpunkt i x_1
$a > 0$, grafen stiger
$a < 0$, grafen synker
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$f(x) = x - 2$
$f(x) = 0 \rightarrow x = 2$, altså et nullpunkt når $x = 2$.

$f'(x) = 1$
$f'(x) \neq 0$, altså ingen ekstremalpunkter, den stiger konstant med stigningstall $a = 1$.



2.grads

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

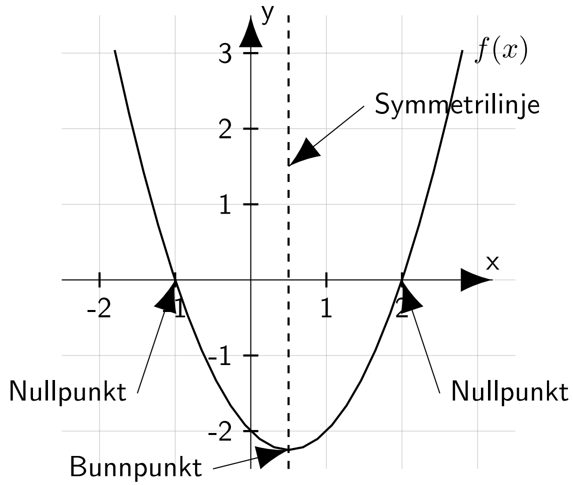
Nullpunkt i x_1 og x_2, kan være uten nullpunkter, dvs hele grafen ligger over eller under x-aksen.
$a > 0$, konveks , ' blid '
$a < 0$, konkav , ' sur '
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$f(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$
$f(x) = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 2$, altså nullpunkter når $x = -1 \vee x = 2$

$f'(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$, altså et ekstremalpunkt når $x = \frac{1}{2}$.

$f''(x) = 2$
$f''(x) \neq 0$, altså ingen vendepunkt.



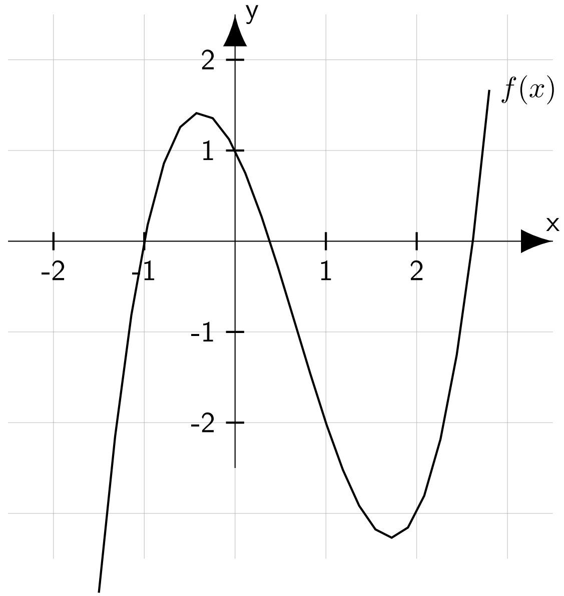
3.grads

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Nullpunkt i x_1, x_2 og x_3, minst ett nullpunkt.
$a > 0$, starter nede.
$a < 0$, starter oppe.
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$$



4.grads

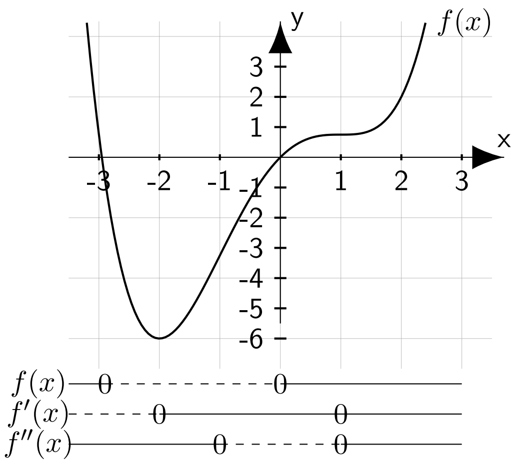
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Nullpunkt i x_1, x_2, x_3 og x_4, kan være uten nullpunkter.
$a > 0$, starter oppe.
$a < 0$, starter nede.

Eksempel :
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

$f'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = -2$,
altså ekstremalpunkter når $x = 1 \vee x = -2$.

$f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 1$,
altså vendepunkter når $x = -1 \vee x = 1$.



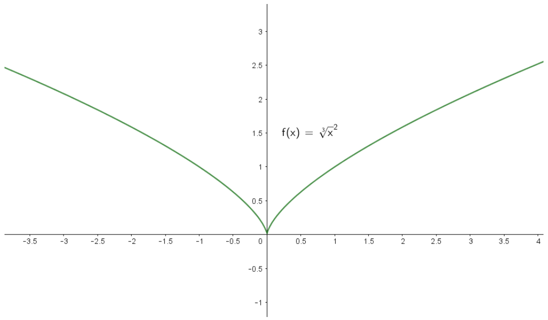
Potensfunksjoner

$$f(x) = a \cdot x^n$$

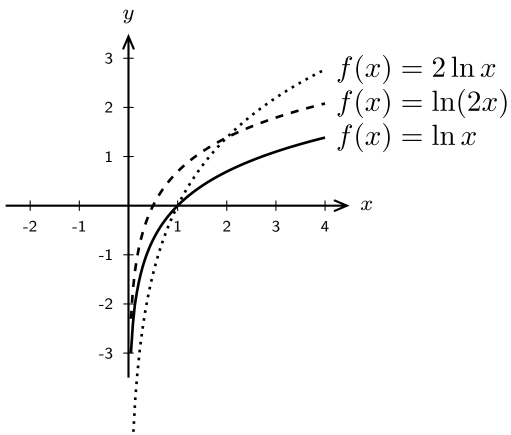
Eksempel
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{0.5}$

$f(x) = 0,001x^{0,4}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

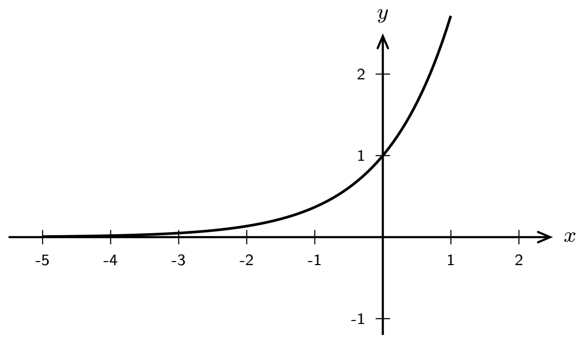


Logaritmiske funksjoner



Eksponentielle funksjoner

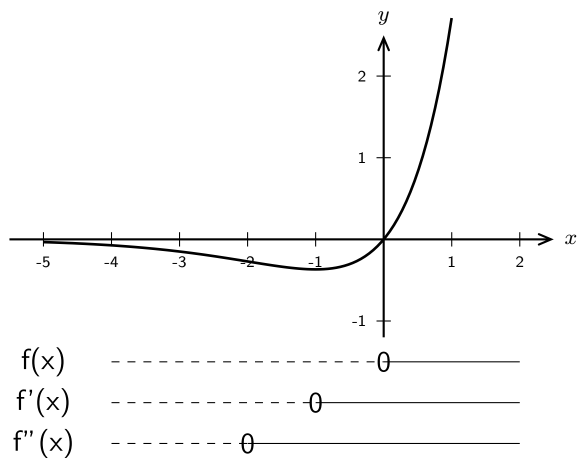
$f(x) = e^x$



$f(x) = x \cdot e^x$
$f(x) = 0 \rightarrow x = 0$, altså nullpunkt når $x = 0$.

$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1$, altså ekstremalpunkt når $x = -1$

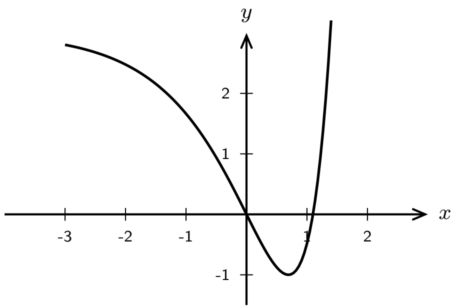
$f''(x) = e^x(x+2)$
$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$, altså vendepunkt når $x = -2$

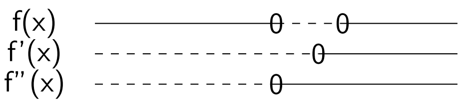


Eksempel :
$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 3)(e^x - 1)$
$f(x) = 0$, altså nullpunkter når $x = 0 \wedge x = \ln 3$.

$f'(x) = 2e^x - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$
$f'(x) = 0 \to x = \ln 2$

$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x = 4e^x(e^x - 1)$
$f''(x) = 0 \to x = 0$





Rasjonale funksjoner

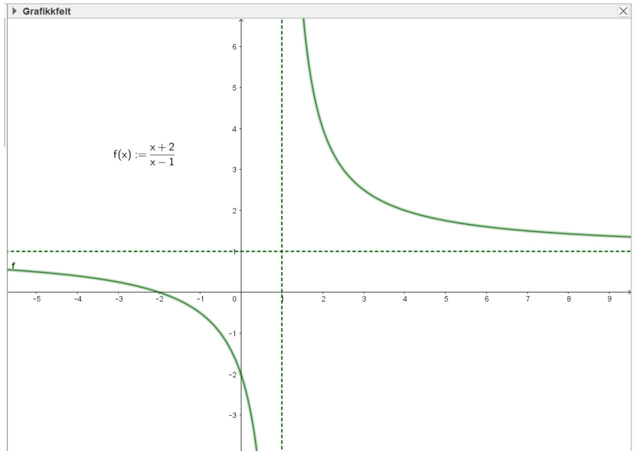
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Bruddpunkt : når nevneren er lik null får vi et bruddpunkt.

Asymptoter : en rett linje som grafen nærmer seg når vi endrer x-verdiene.

Vertikal asymptote : når nevneren er null og ikke telleren er null.

Horisontal asymptote : en linje grafen nærmer seg når x-verdiene bli veldig store eller veldig små.



Geogebra : Asymptote(f(x))

Tangenter

Ettpunktsformelen :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Eksempel

$$f(x) = x^3$$

Finn likningen til tangenten i punktet $(2, f(2))$.

$$f(x) = x^3$$
$$f(2) = 2^3 = 8$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Da er stigningstallet til tangenten $a = 12$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$y - 8 = 12(x - 2)$$
$$y = 12x - 24 + 8$$
$$y = 12x - 16$$

Delt funksjonsuttrykk

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \ , x < a \\ h(x) \ , \ x \geq a \end{cases}$$

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \ , x < 1 \\ -2x + 5 \ , \ x \geq 1 \end{cases}$$

Kontinuitet

f er kontinuerlig dersom den er sammenhengende i alle punkter.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Eksempel
$\lim_{x \to 1} x^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$
$\lim_{x \to 1} -2x + 5 = -2 \cdot 1 + 5 = 3$
altså kontinuerlig.

Deriverbarhet

En funksjon kan være kontinuerlig i et punkt, men ikke deriverbar, f.eks i et knekkpunkt.
En funksjon er ikke deriverbar dersom den ikke er kontinuerlilg i et punkt $x = a$

En funksjon er deriverbar dersom :

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$$

Inverse funksjoner

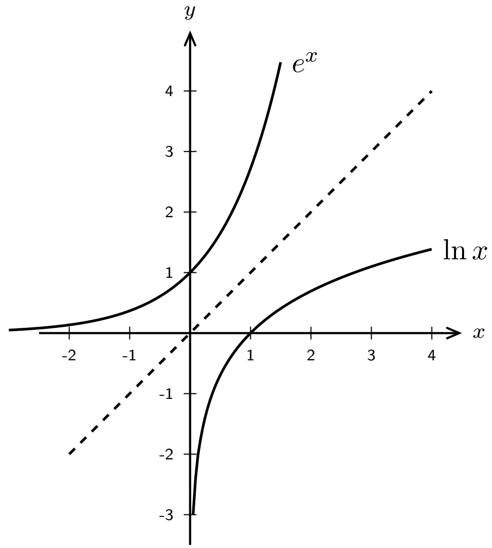
f og f^{-1}er omvendte funksjoner hvis

$$f^{-1}(f(x)) = 0$$

$$f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$$

Eksempler
$f(x) = x^2 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln x$
$f(x) = \frac{1}{x} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Inverse funksjoner - e^x og $\ln x$



Derivasjon av inverse funksjoner

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(der $g(x) = f^{-1}(x)$)

Eksempel

$$f(x) = x^2 \ , \ x > 0$$
$$f'(x) = 2x$$
$$y = x^2$$
$$x = \sqrt{y}$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(g(x) = 2\sqrt{x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vektorer

Enhetsvektorer - vektorer langs aksene som er 1 lang.
$\vec{e_x} = [1, 0]$
$\vec{e_y} = [0, 1]$

Vektor mellom punkter : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$
$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

Sum av 2 vektorer :
$[x_1, y_1] + [y_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$

Produkt av tall og vektor :
$k \cdot [x_1, y_1] = [k \cdot x_1, k \cdot y_1]$

Eksempel :
Dersom $\overrightarrow{a}$ er dobbelt så lang som $\overrightarrow{a}$: $\overrightarrow{a} = 2 \cdot \overrightarrow{b}$
$[x_a, y_a] = 2[x_b, y_b] = [2 \cdot x_b, 2 \cdot y_b]$

Produkt av to vektorer :
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = [x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Lengden til en vektor :
$|[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Vi kan finne avstand mellom 2 punkter ved å finne vektoren mellom punktene og så finne lengden av vektoren.

Skalarprodukt :
Skalar = tall , altså for dette produktet et tall som svar IKKE en vektor.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Orthogolnale vektorer (vinkelrette):
$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

Vektoren $[a, b]$ står vinkelrett på vektoren $[-b, a]$

Parallelle vektorer :
$\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$

Regneregler uten koordinater:
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a}^2$

$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2$

Parameterframstilling av linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

Denne kan også skrives som vektorfunksjon :
$l(t) = [x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t]$

Orthogonale linjer :
En linje l med likningen $y = ax + b$ har retningsvektor $\overrightarrow{r} = [1, a]$
En linje m som står vinkelrett l har stigningstallet $a = -\frac{1}{a}$.

Vektorfunksjoner

Posisjonsvektor :

$$\vec{r}(t) = [f(t), g(t)]$$

Fartsvektor :

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [f'(t), g'(t)]$$

Akselerasjonsvektor :

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = [f''(t), g''(t)]$$

Geogebra : $kurve(x(t), y(t), t, 0, 10)$

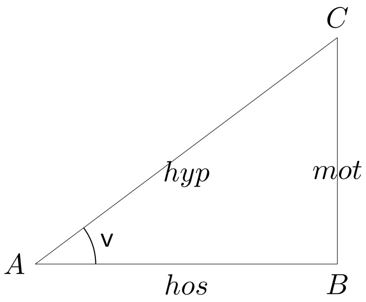
Sirkellikningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Trigonometri

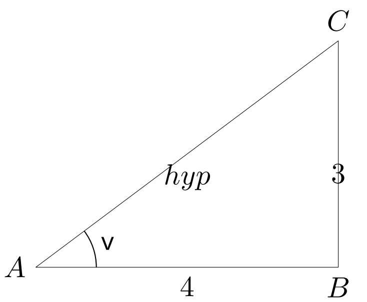
Pythagoras' setning

$$kat^2 + kat^2 = hyp^2$$



mot = motstående katet
hos = hosliggende katet
hyp = hypotenusen

Eksempel



$$\begin{aligned} hyp^2 &= kat^2 + kat^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \\ hyp &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

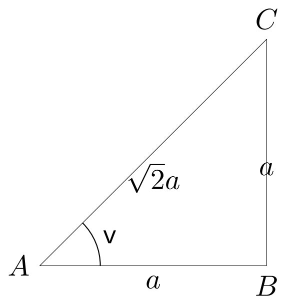
Sinus : $\sin v = \frac{mot}{hyp}$

Cosinus : $\cos v = \frac{hos}{hyp}$

Tangens : $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{mot}{hos}$

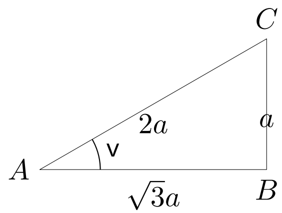
Eksempel
Likebeint, rettvinklet trekant $\rightarrow$ 2 like lange sider.

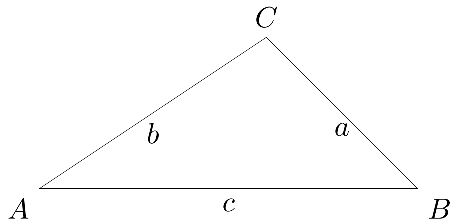
$hyp = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$



Eksempel
$30° - 60° - 90°-$trekant,
hypotenusen er dobbelt så lang som det korteste katetet.

$(2a)^2 = \sqrt{a^2 + kat^2} \rightarrow kat = \sqrt{3}a$





Sinussetningen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cosinussetningen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Arealsetningen

$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

DIVERSE

Talltyper

$\mathbb{N}$	Naturlige tall	Hele positive tall
	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
$\mathbb{Z}$	Hele tall	
	$\mathbb{Z} = \{.., -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
$\mathbb{Q}$	Rasjonale tall	Kan skrives som brøk
	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \| a, b \in \mathbb{Z}\}$	
	Irrasjonale tall	$\pi, \sqrt{2}, ..$
$\mathbb{R}$	Reelle tall	Hele tallinja
$\mathbb{C}$	Komplekse tall	
	$z = Re + Im = a + bi, i = \sqrt{-1}$	
	Imaginære tall	

Mengder

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cap B = \{4, 5\}$
$C = A/\{1\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$\cup$	Union - slår sammen mengder
$\cap$	Snitt - elementene som er felles i to mengder
$(A\|B)$	A gitt B , Hvis B så A
$x \in \mathbb{N}$	x er element i mengden av Naturlige tall
$L = \{...\}$	løsningsmengde

Intervaller

$\langle 2, 4\rangle$	Tallinja fra 2 til 4
$[2, 4\rangle$	Tallinja fra og med 2 til 4
$\langle 2, 4]$	Tallinja fra 2 til og med 4
$\langle 2, \rightarrow\rangle$	Tallinja fra 2 og oppover

Logikk

Disjunksjon

$p \vee q$	p eller q

Konjunksjon

$p \wedge q$	p og q

Implikasjon

$\Rightarrow$	p medfører q, hvis p så q

Ekvivalens

$\Leftrightarrow$	p er lik q , hvis og bare hvis p så q

Enheter

1 nautisk mil = 1852 m
1 knop = 1 nautisk mil pr. time
1 liter = 1 dm^3