Algebra

Kvadratsetningene

Kvadratsetningene kan brukes til å løse opp parenteser og til å faktorisere uttrykk.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

Fullstendige kvadrater

$$
\begin{aligned}
x^2 + bx &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
&= (x + \frac{b}{2})^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Potenser

$a^n = a \cdot a \cdot a....$, n ganger

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot a^q$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

$a^0 = 1$

Røtter

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Polynomdivisjon

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x-1)(x+2)$

$f(x)$ har nullpunkter i $x \in \{-2, -1, 1\}$

For å faktorisere tredjegradspolynomer kan vi dividere med én av faktorene.

Eksempel

Faktorisere 3.gradsuttrykk : $x^3 - 4x^2 + x + 6$
Finne et nullpunkt : $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$

$P(2) = 0$, da er $x = 2$ et nullpunkt, og en av faktorene er $(x-2)$.
Da kan vi dele med $(x-2)$

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 - 4x^2 \;\; + x + 6\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad -2x^2 \;\; + x \\
\qquad \underline{\;\; 2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad -3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Så kan vi faktorisere 2.gradsuttrykket.
$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+2)$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x+2)(x-3)$

Likningsett

Likninger med flere ukjente.

Innsettingsmetoden

$$\begin{aligned} I: \quad & x+y=-1 \\ II: \quad & 2x+y=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: \quad & x=-1-y \\ II: \quad & 2(-1-y)+y=1 \\ & -2-2y+y=1 \\ & y=-3 \\ & x=-1-(-3) \\ & x=2 \end{aligned}$$

Addisjonsmetoden

$$\begin{aligned} I: \quad & x+y=-1 \\ II: \quad & 2x+y=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: \quad & -x-y=1 \\ II: \quad & 2x+y=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I+II: \quad & x=2 \\ I: \quad & 2+y=-1 \\ & y=-3 \end{aligned}$$

Ulikheter

Samme regler som for likninger.
OBS! Dersom vi multipliserer eller divederer på et nagetivt tall må ulikhetstegnet snus.

Eksempel

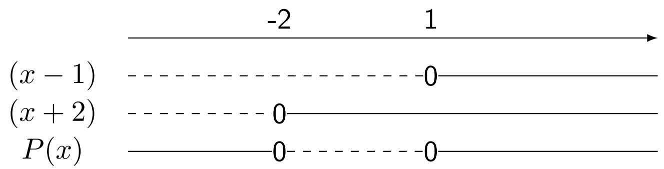
$$\begin{aligned} 2x-1 &> x-1 \\ 2x-x &> -1+1 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} x-3 &> 2x-5 \\ x-2x &> -5+3 \\ -x &> -2 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Eksempel - 2.grads

$$\begin{aligned} x^2+x &< 2 \\ x^2+x-2 &< 0 \\ (x+2)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$



$$x \in \langle -2, 1 \rangle$$

Logaritmer - Naturlige

$$\begin{aligned} \ln e &= 1 \\ \ln 1 &= 0 \\ e^{\ln a} &= a \\ \ln e^a &= a \\ \ln a^b &= b \cdot \ln a \\ \ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \end{aligned}$$

Eksempel

$$\ln a^2 + \ln \tfrac{1}{a} = 2\ln a + \ln 1 - \ln a = \ln a$$

Eksempel

$$\begin{aligned} 2\ln x &= 4 \\ \ln x &= 2 \\ e^{\ln x} &= e^2 \\ x &= e^2 \end{aligned}$$

Funksjoner

D_f : definisjonsmengden til funksjonen f er alle x-verider vi kan velge for x.
V_f : verdimengden til funksjonen er alle funksjonsverdiene (y-verdiene) vi får for alle x-verdier i D_f-

$f(x)$ er den fysiske funksjonen.

- $f(x) = 0 \rightarrow$ nullpunktene.
- $f(x) > 0 \rightarrow$ grafen ligger over x-aksen, dvs. har positive y-verdier.
- $f(x) < 0 \rightarrow$ grafen ligger under x-aksen, dvs. har negative y-verdier.

$f'(x)$ er veksten til funksjonen.

- $f'(x) = 0 \rightarrow$ ekstremalpunkter, topp-/bunn-/terrassepunkt.
- $f'(x) > 0 \rightarrow$ grafen stiger.
- $f'(x) < 0 \rightarrow$ grafen synker.

$f''(x)$ er krumningen til funksjonen.

- $f''(x) = 0 \rightarrow$ vendepunkt.
- $f''(x) > 0 \rightarrow$ grafen er konveks, hul side opp, smiler".
- $f''(x) < 0 \rightarrow$ grafen er konkav, hul side ned, sur".

Gjennomsnittlig vekst

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

En rett linje har konstant vekst.

Momentan vekst

Veksten i et punkt på en graf er lik stigningstallet til tangenten i punktet.
Dette stigningstallet kan vi finne ved å derivere.

$f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Grenseverdier

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0} = \infty$

Grenseverdisetningene

$\lim f(x) \pm g(x) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

Derivasjon

Definisjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En funksjon har et stasjonært punkt dersom $f'(x) = 0$, dvs. veksten er null.
Stasjonært punkt kan være ekstremalpunkt (topp/bunn) eller et terrassepunkt.

Regler

$a \cdot x^n = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

$(a)' = 0$

$(a \cdot x)' = a$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerneregel : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Polynomfunksjoner

1.grads - Lineær funksjon

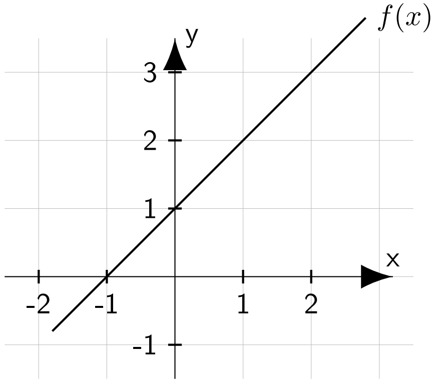
$$f(x) = ax + b = a(x - x_1)$$

Nullpunkt i x_1
$a > 0$, grafen stiger
$a < 0$, grafen synker
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$f(x) = x - 2$
$f(x) = 0 \rightarrow x = 2$, altså et nullpunkt når $x = 2$.

$f'(x) = 1$
$f'(x) \neq 0$, altså ingen ekstremalpunkter, den stiger konstant med stigningstall $a = 1$.



2.grads

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

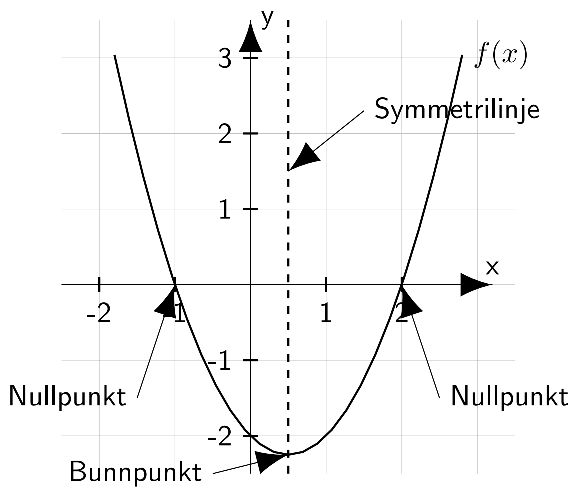
Nullpunkt i x_1 og x_2, kan være uten nullpunkter, dvs hele grafen ligger over eller under x-aksen.
$a > 0$, konveks , ' blid '
$a < 0$, konkav , ' sur '
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$f(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$
$f(x) = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 2$, altså nullpunkter når $x = -1 \vee x = 2$

$f'(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$, altså et ekstremalpunkt når $x = \frac{1}{2}$.

$f''(x) = 2$
$f''(x) \neq 0$, altså ingen vendepunkt.



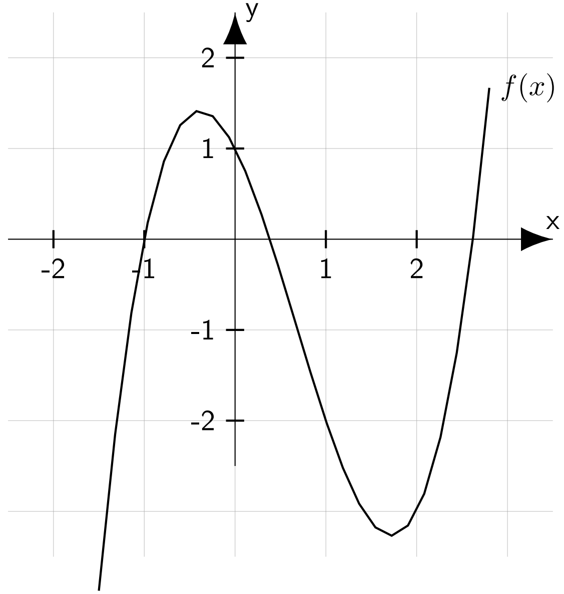
3.grads

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Nullpunkt i x_1, x_2 og x_3, minst ett nullpunkt.
$a > 0$, starter nede.
$a < 0$, starter oppe.
Krysser y-aksen i $f(0) = b$

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$$



4.grads

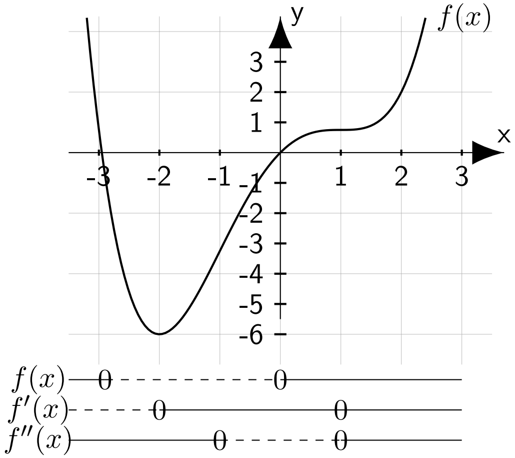
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Nullpunkt i x_1, x_2, x_3 og x_4, kan være uten nullpunkter.
$a > 0$, starter oppe.
$a < 0$, starter nede.

Eksempel :
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

$f'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = -2,$
altså ekstremalpunkter når $x = 1 \vee x = -2$.

$f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 1,$
altså vendepunkter når $x = -1 \vee x = 1$.



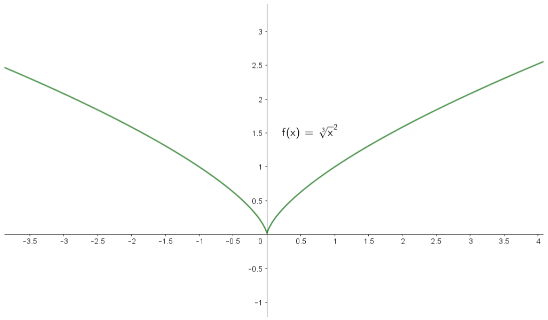
Potensfunksjoner

$$f(x) = a \cdot x^n$$

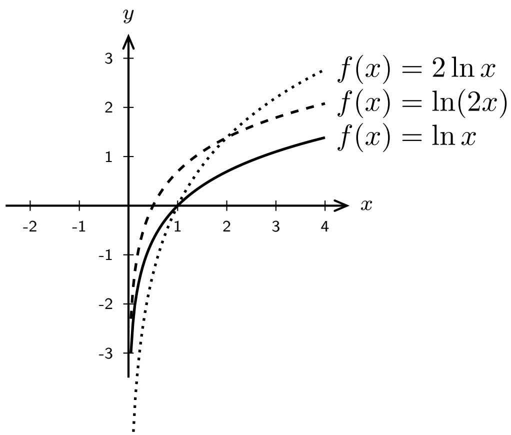
Eksempel
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{0.5}$

$f(x) = 0,001x^{0,4}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

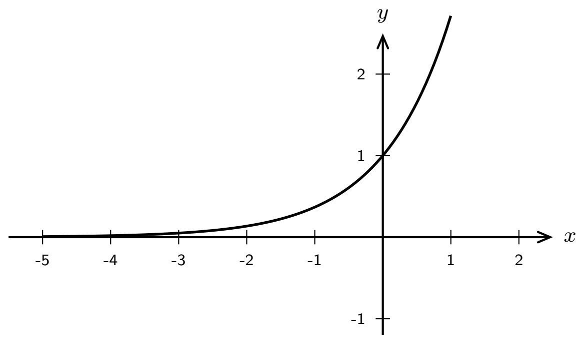


Logaritmiske funksjoner



Eksponentielle funksjoner

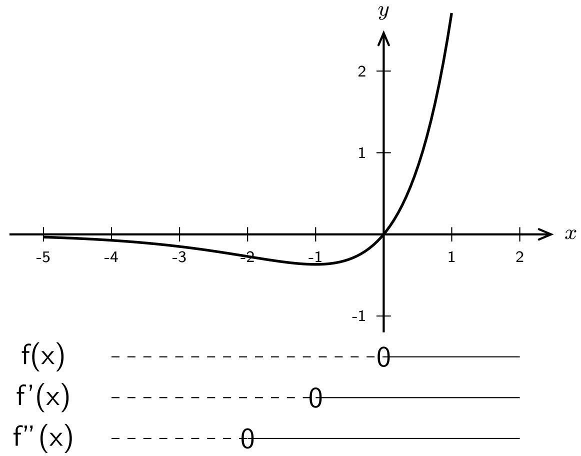
$f(x) = e^x$



$f(x) = x \cdot e^x$
$f(x) = 0 \rightarrow x = 0$, altså nullpunkt når $x = 0$.

$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1$, altså ekstremalpunkt når $x = -1$

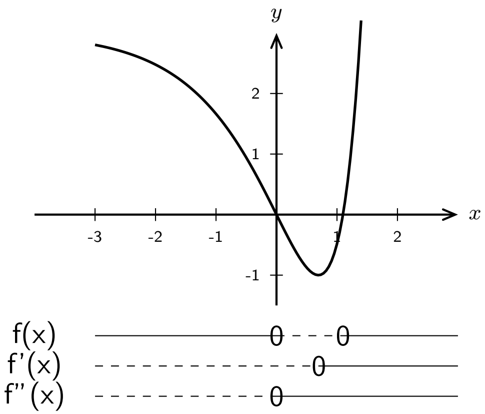
$f''(x) = e^x(x+2)$
$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$, altså vendepunkt når $x = -2$



Eksempel :
$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 3)(e^x - 1)$
$f(x) = 0$, altså nullpunkter når $x = 0 \wedge x = \ln 3$.

$f'(x) = 2e^x - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$
$f'(x) = 0 \rightarrow x = \ln 2$

$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x = 4e^x(e^x - 1)$
$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$



Rasjonale funksjoner

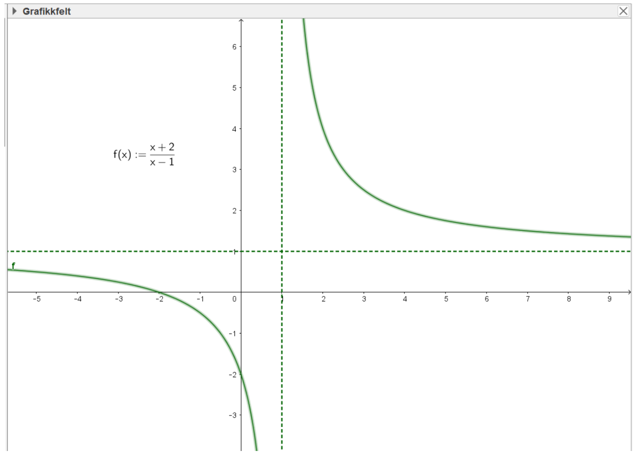
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Bruddpunkt : når nevneren er lik null får vi et bruddpunkt.

Asymptoter : en rett linje som grafen nærmer seg når vi endrer x-verdiene.

Vertikal asymptote : når nevneren er null og ikke telleren er null.

Horisontal asymptote : en linje grafen nærmer seg når x-verdiene bli veldig store eller veldig små.



Geogebra : Asymptote(f(x))

Tangenter

Ettpunktsformelen :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Eksempel

$$f(x) = x^3$$

Finn likningen til tangenten i punktet $(2, f(2))$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(2) &= 2^3 = 8 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(2) &= 3 \cdot 2^2 = 12 \end{aligned}$$

Da er stigningstallet til tangenten $a = 12$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - 8 &= 12(x - 2) \\ y &= 12x - 24 + 8 \\ y &= 12x - 16 \end{aligned}$$

Delt funksjonsuttrykk

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\ , x < a \\ h(x)\ ,\ x \geq a \end{cases}$$

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\ , x < 1 \\ -2x + 5\ ,\ x \geq 1 \end{cases}$$

Kontinuitet

f er kontinuerlig dersom den er sammenhengende i alle punkter.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Eksempel

$\lim_{x \to 1} x^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$

$\lim_{x \to 1} -2x + 5 = -2 \cdot 1 + 5 = 3$

altså kontinuerlig.

Deriverbarhet

En funksjon kan være kontinuerlig i et punkt, men ikke deriverbar, f.eks i et knekkpunkt.
En funksjon er ikke deriverbar dersom den ikke er kontinuerlilg i et punkt $x = a$

En funksjon er deriverbar dersom :

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Inverse funksjoner

f og f^{-1}er omvendte funksjoner hvis

$$f^{-1}(f(x)) = 0$$

$$f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$$

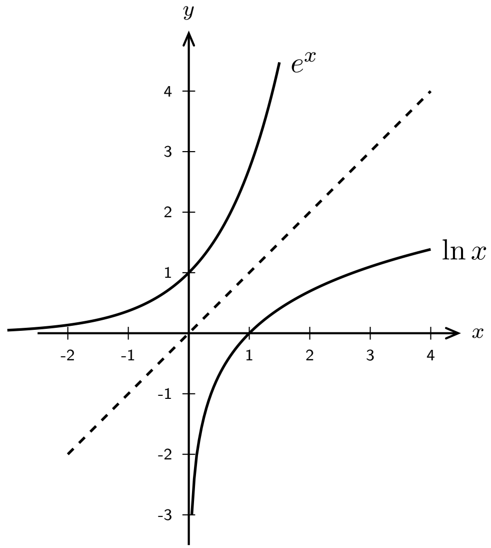
Eksempler

$f(x) = x^2 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln x$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Inverse funksjoner - e^x og $\ln x$



Derivasjon av inverse funksjoner

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(der $g(x) = f^{-1}(x)$)

Eksempel

$$f(x) = x^2\ ,\ x > 0$$
$$f'(x) = 2x$$
$$y = x^2$$
$$x = \sqrt{y}$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(g(x) = 2\sqrt{x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Integralregning

Definisjon :

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \quad \text{når } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

NB!
Dersom grafen ligger delvis over og delvis under x-aksen, må vi dele opp integralet for å finne areal.

Reneregler :

$$\int a \cdot x^n\ dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int e^{ax}\ dc = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \ln x\ dx = \frac{1}{x} + C$$

$$\int \sin(x)\ dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx$$

Metoder :
Delvis integral

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Substitusjon

$$\int x \cdot e^{x^2}\ dx = \int x \cdot e^{x^2}\ dx$$

$$u = x^2\ ,\ u' = 2x\ ,\ dx = \frac{1}{u'}du$$

$$= \int x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u\ du$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Delbrøkoppspalting

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}\ dx = \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}\ dx$$

Programmering

Numeriske metoder dere bør kjenne igjen og bruke på eksamen :

TOPPUNKT
sammenligne påfølgende funksjonsverdier

$$while f(t) <= f(t+dt)$$

BUNNPUNKT
sammenligne påfølgende funksjonsverdier

$$while f(t) >= f(t+dt)$$

NULLPUNKT
y-verdiene har ulikt fortegn
if $f(t) * f(t+dt) <= 0$:

Ekstremalpunkt
d(x) har ulikt fortegn

$$df(t) * df(t+dt) <= 0$$

AREAL (Bestemt integral)
summerer rektangler med bredde dt og høyde f(t)
$A = A + f(t) * dt$

EULER-METODEN
regner neste funksjonsverdi når vi vet endring legger til en endring ganget med steglende

$$y = y + dy * dt$$

NULLPUNKT
regner ut hvor tangentlinje skjærer x-aksen og setter det som neste"x-verdi

$$x = x + df(x)/f(x)$$

$$abs(f(x)) < 0.01$$

vi leter til vi kommer nærme nok"0

$(f(t+dt) - f(t))/dt$
gir den numerisk deriverte i t

$(f(t+dt) - f(t-dt))/(2 * dt)$
gir også den numerisk deriverte i t

Vektorer og Romgeometri

Enhetsvektorer - vektorer langs aksene som er 1 lang.
$\vec{e_x} = [1, 0, 0]$
$\vec{e_y} = [0, 1, 0]$
$\vec{e_z} = [0, 0, 1]$

Vektor mellom punkter : $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$
$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$

Sum av 2 vektorer :
$[x_1, y_1, z_1] + [y_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$

Produkt av tall og vektor :
$k \cdot [x_1, y_1, z_1] = [k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1]$

Lengden til en vektor :
$|[x, y, z]| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Vi kan finne avstand mellom 2 punkter ved å finne vektoren mellom punktene og så finne lengden av vektoren.

Skalarprodukt :
Skalar = tall , altså for dette produktet et tall som svar IKKE en vektor.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Orthogolnale vektorer (vinkelrette):

$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

Vektoren $[a, b]$ står vinkelrett på vektoren $[-b, a]$

Parallelle vektorer :
$\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$

Regneregler uten koordinater:
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a}^2$

$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2$

Parameterframstilling av linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

Denne kan også skrives som vektorfunksjon :
$l(t) = [x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t]$

Orthogonale linjer :
En linje l med likningen $y = ax + b$ har retningsvektor $\overrightarrow{r} = [1, a]$
En linje m som står vinkelrett l har stigningstallet $a = -\frac{1}{a}$.

Plan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Normalvektor : $\vec{n} = [a, b, c]$
Punkt i planet : $P = (x_0, y_0, z_0)$

Avstand fra punkt til linje

$$q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

r er linjens retningsvektor.

Avstand fra punkt til plan

$$q = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$
$P = (x_1, y_1, z_1)$

Sirkellikningen

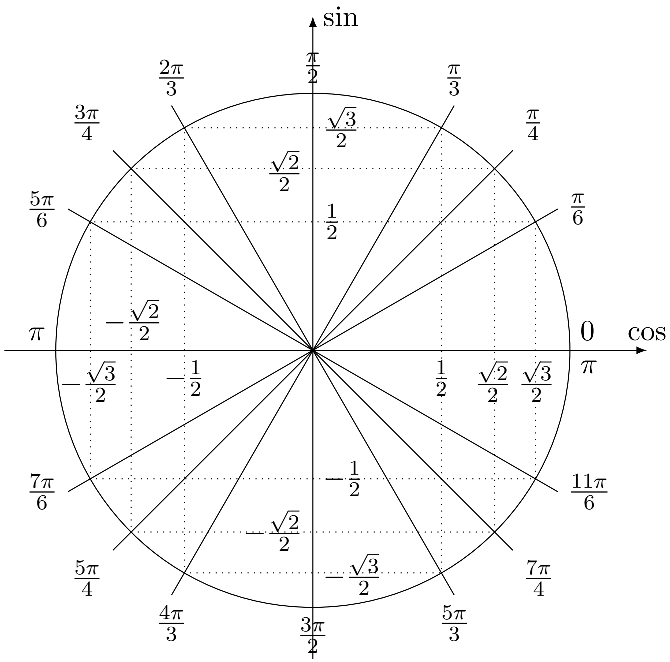
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Kulelikningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Trigonometri

Enhetssirkelen



Enhetsformelen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Trigonometriske likninger

$$\sqrt{2}\sin(2x) = 1$$
$$\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \vee x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \pi$$

Sum og differanse av vinkler

$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$
$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$

$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Trigonometriske funksjoner

$f(x) = A \cdot \sin(k(x-c)) + d$

A = amplitude
d= likevektslinje
p = periode , $p = \frac{2\pi}{k}$
c = faseforskyvning

Omforming av uttrykk

$$a\sin(k \cdot x) + b\cos(k \cdot x) = A \cdot \sin(k(x-c)) + d$$

Amplituden $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

I tillegg bruker vi :
$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$

Eksempel

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 0$$
$$A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}(\sin(2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\sqrt{2}(\sin(2x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(2x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sqrt{2}(\sin(2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(2x) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = 0$$
$$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\sqrt{2}\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$$

Rekker

Aritmetiske rekker

$a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Geometriske rekker

$a_{n+1} = a_n \cdot k$
$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
$s_n = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$

Konvergente rekker

$k \in \langle -1, 1 \rangle$ - konvergent
(ellers er den divergent)

Konvergente og uendelige rekker

$S = \frac{a_1}{1-k}$

Variabel koeffisient

$$2x + 4x^2 + 8x^3 + ...$$

$k = \frac{4x^2}{2x} = 2x$

$k \in \langle -1, 1 \rangle$
$-1 < 2x < 1$
$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

Induksjonsbevis

DIVERSE

Talltyper

$\mathbb{N}$ Naturlige tall — Hele positive tall
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\mathbb{Z}$ Hele tall
$\mathbb{Z} = \{.., -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\mathbb{Q}$ Rasjonale tall — Kan skrives som brøk
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

Irrasjonale tall — $\pi, \sqrt{2}, ..$

$\mathbb{R}$ Reelle tall — Hele tallinja

$\mathbb{C}$ Komplekse tall

$$z = Re + Im = a + bi, i = \sqrt{-1}$$

Imaginære tall

Mengder

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cap B = \{4, 5\}$
$C = A/\{1\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$\cup$	Union - slår sammen mengder
$\cap$	Snitt - elementene som er felles i to mengder
$(A\|B)$	A gitt B , Hvis B så A
$x \in \mathbb{N}$	x er element i mengden av Naturlige tall
$L = \{...\}$	løsningsmengde

Intervaller

$\langle 2, 4 \rangle$	Tallinja fra 2 til 4
$[2, 4\rangle$	Tallinja fra og med 2 til 4
$\langle 2, 4]$	Tallinja fra 2 til og med 4
$\langle 2, \rightarrow \rangle$	Tallinja fra 2 og oppover

Logikk

Disjunksjon
$p \vee q$ — p eller q

Konjunksjon
$p \wedge q$ — p og q

Implikasjon
$\Rightarrow$ — p medfører q, hvis p så q

Ekvivalens
$\Leftrightarrow$ — p er lik q , hvis og bare hvis p så q

Enheter

1 nautisk mil = 1852 m
1 knop = 1 nautisk mil pr. time
1 liter = 1 dm^3

Eulers tall

$$e \approx 2.71828...$$

$$e = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}$$