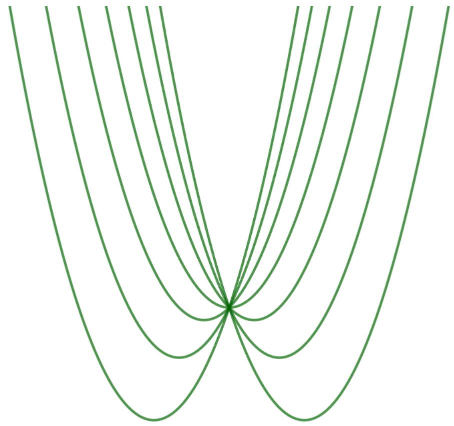
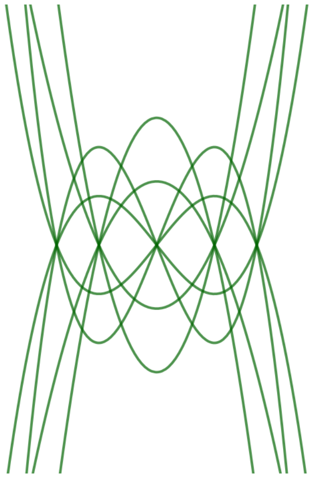
Funksjoner
Definisjoner mm

Polynomer

Ta utgangspunkt i en andregrads funksjon og lag tilsvarende som tegningen under.

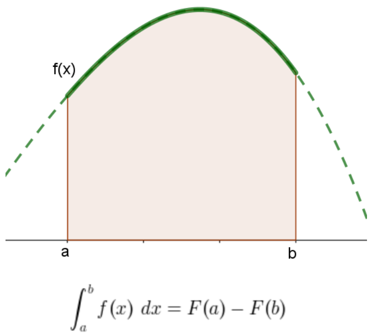


Ta utgangspunkt i funksjonen $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$.
Tegn varianter av denne funksjonen for å tegne figuren under.
(tips - du kan derivere, multiplisere, ...)

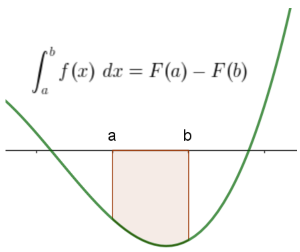


Integral

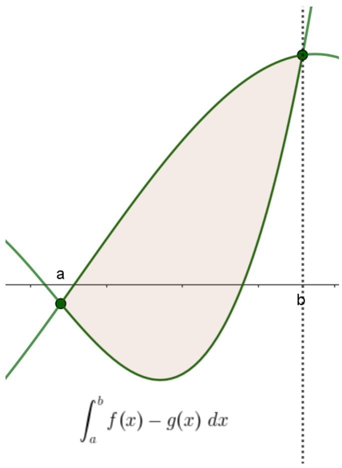
Areal mellom $f(x)$, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$



Areal mellom $f(x)$, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.
NB! Når området ligger under x-aksen blir svaret negativt.
Arealet er da $|\int_a^b f(x)\ dx|$



Areal som er avgrenset av to grafer.



Kontinuitet

Definisjon - Kontinuitet :
En funksjon er kontinuerlig dersom grafen til funksjonen er sammenhengende.
Dersom $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ så er $f(x)$ kontinuerlig, forutsatt at $f(a)$ eksisterer, altså at $f(x)$ er definert for a.

Dersom f er kontinuerlig i alle punktene i et intervall, sier vi at f er kontinuerlig i intervallet.

Eksempel
Vi skal undersøke om $f(x) = x - 3$ er kontinuerlig for $x = 2$
$f(2) = 2 - 3 = -1$, altså kontinuerlig for $x = 2$

Definisjon - kontinuitet i bruddpunkter
Anta at $f(x)$ er en funksjon med delt forskrift der $x = a$ er bruddpunkt.
Da er f kontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ,x < 1 \\ x + 1 & ,x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \begin{cases} 1^2 + 1 = 2 & ,x < 1 \\ 1 + 1 = 1 & ,x \geq 1 \end{cases}$$

altså kontinuerlig.

Vi deriverer : $(x^2 + x)' = 2x + 1$ og $(x + 1)' = 1$
Når x=1 får vi : $2 \cdot 1 + 1 = 3$ og 1 , altså er $f(x)$ ikke deriverbar i $x = 1$

Definisjon - Deriverbarhet :
Vi sier at en funksjon $f(x)$ er deriverbar i et punkt $x = a$ dersom :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dersom en graf har et knekkpunkt i $x = a$ er den ikke deriverbar for $x = a$

Dersom en funksjon ikke er kontinuerlig for $x = a$ er den heller ikke deriverbar for $x = a$

Middelverdisetningen

Hvis $f : [a, b] \to R$ er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar i $< a, b >$. Så finnes det en $c \in < a, b >$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eksempel

Vis at $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ for alle x, y.
Sett $f(x) = \cos x$ inn i Middelverdisetningen:

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(c) \\ \frac{|\cos x - \cos y|}{x - y} &= |-\sin c| \\ |-\sin c| &\leq 1 \\ |\cos x - \cos y| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

Ekstremalverdisetningen

La $f : [a, b] \to R$ være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket begrenset intervall. Da har f både maksimums- og minimumspunkter.

Maksimalpunkt

$f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$

Kontinuitet for ulike funksjoner

Kontinuerlige funksjoner :

- $f(x) = a$, der a er en konstant
- $f(x) = x$
- $f(x) = x^n$, potensfunksjoner
- $f(x) = |x|$, absoluttverdien
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$

Diskontinuerlige funksjoner :

- $f(x) = 1/x$
- $\tan(x)$

Kontinuitet ved epsilon-delta $(\epsilon - \delta)$

Definisjon
Funksjonen f er kontinuerlig i punktet $a \in D_f$ dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at nåe $x \in D_f$så har vi

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Eksempel
Vis at $f(x) = 5x + 2$ er kontinuerlig i $a = 2$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(2)| &= |(5x + 2) - (5 \cdot 2 + 2)| \\
&= |5x - 10| = 5 \cdot |x - 2| \\
|x - 2| &< \delta \\
5|x - 2| &< \epsilon \\
|x - 2| &< \frac{\epsilon}{5}
\end{aligned}$$

Velger $\delta = \frac{\epsilon}{5}$

$$\begin{aligned}
|x - 2| < \delta &= \frac{\epsilon}{5} \\
|f(x) - f(2)| &= 5|x - 2| \\
5|x - 2| &< 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon
\end{aligned}$$