

Arbeidshefte

Integralregning Metoder

Formel

Substitusjon :

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{u'} du, u = g(x)$$

Formel

Delvis integral :

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Formel

Delbrøkkoppspalting :

$$\int \frac{1}{a \cdot b} dx = \int \frac{A}{a} + \frac{B}{b} dx$$

Integrasjon ved substitusjon

Formel

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{u'} du, \quad u = g(x)$$

Eksempel

Vi erstatter en del av uttrykket med en ny variabel u for å få et enklere integral å løse. Når vi gjør dette må vi også endre dx til du , det gjør vi ved å sette $dx = \frac{1}{u'} du$. Dersom vi ikke blir kvitt x i uttrykket vil ikke denne metoden fungere.

$$\int e^{2x} dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$
$$u = 2x, \quad u' = 2, \quad dx = \frac{1}{u'} du = \frac{1}{2} du$$

Oppgave 1

1) $\int e^{5x} dx$

2) $\int \frac{2 \ln x}{x} dx =$

3) $\int (2x + 1)e^{x^2+x} dx =$

4) $\int \frac{x}{x^2+1} dx =$

5) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx =$

Oppgave 2

1) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx =$

2) $\int x \cdot (x^2 + 2)^6 dx =$

3) $\int 2x e^{x^2+1} dx =$

4) $\int 4e^{2x+1} dx =$

5) $\int \frac{1}{3x+1} dx =$

Oppgave 3

1) $\int \frac{8x}{2x^2+5} dx =$

2) $\int \frac{6x^2}{x^3+1} dx =$

3) $\int \frac{2x}{(x^2+3)^3} dx =$

4) $\int x \cdot (x^2 + 1)^2 dx =$

5) $\int dx =$

Integrasjon ved delvis integral

Formel

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Eksempel

Eksempel

Vi løser integralet i flere steg for å prøve å få et enklere integral.

$$\begin{aligned}\int 4x \cdot e^x \, dx &= 4x \cdot e^x - \int 4 \cdot e^x \, dx \\ &= 4xe^x - 4e^x + C \\ &= 4e^x(x - 1) + C\end{aligned}$$

Mellomregning :

$$u = 4x, \quad u' = 4$$

$$v = e^x, \quad v' = e^x$$

Oppgave 4

1) $\int 2x \cdot \ln(x) \, dx =$

2) $\int x^4 \cdot \ln(x) \, dx =$

3) $\int \ln(x) \, dx =$

Oppgave 5

1) $\int 2x \cdot e^x dx =$

2) $\int e^x(x^2 - 1) dx =$

3) $\int (x^2 + 2x + 1)e^x dx =$

4) $\int 8x^2 \cdot e^{2x} dx =$

5) $\int e^x \cdot x^2 dx =$

Integrasjon ved delbrøkopp spalting

Formel

$$\int \frac{1}{a \cdot b} dx = \int \frac{A}{a} + \frac{B}{b} dx$$

Eksempel

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{2}{(x+1)(x-1)} dx \\ &= \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} dx \\ (\text{forts. etter mellomregn.}) &= \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

Mellomregning

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+1)(x-1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad | \cdot \text{FN} \\ 2 &= A(x-1) + B(x+1) \\ x = -1 : 2 &= -2A \Rightarrow A = -1 \\ x = 1 : 2 &= 2B \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

Oppgave 6

1) $\int \frac{1}{x^2-1} dx =$

2) $\int \frac{4}{x^2-x} dx =$

Oppgave 7

1) $\int \frac{1}{x^2-4} dx =$

2) $\int \frac{1}{2x^2-18} dx =$

3) $\int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} dx =$

4) $\int \frac{2}{x^2-9} dx =$

5) $\int \frac{1}{x^2-16} dx =$

6) $\int \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx =$

Oppgave 8

1) $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx =$

2) $\int \frac{x^2+x+13}{x^3-2x^2-5x+6} dx =$

3) $\int \frac{8}{x^3-4x} dx =$

4) $\int \frac{x+4}{x^2+2x} dx =$

5) $\int \frac{3x}{x^2-x-2} dx =$

6) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx =$

Oppgave 9

1) $\int \frac{3x-5}{x^2-x-12} dx =$

2) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x} dx =$

3) $\int \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x} dx =$

4) $\int \frac{2x^3+x^2-2x-3}{x^2-1} dx =$

Oppgave 10

1) $\int (3x^2 + 3x + \pi) dx =$

2) $\int \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{x} dx =$

3) $\int e^{x^2+x}(2x + 1) dx =$

4) $\int e^{2x} \cdot 2x dx =$

5) $\int e^{x^2} \cdot 2x dx =$

6) $\int \frac{2x}{x^2-4} dx =$

7) $\int \frac{2x+4}{x^2-x} dx =$

8) $\int 10x(x^2 + 1)^4 dx =$

Oppgave 11

1) $\int (4x + 4)e^{x^2+2x+1} dx =$

2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx =$

3) $\int e^x + 3x^2 dx =$

4) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx =$

5) $\int x \ln(x) dx =$

Oppgave 12

Finn integralene

1) $\int (x - 1)^2 dx$

2) $\int x^2 - 2x + 1 dx$

Er svarene like?

Dette arbeidshefte :



Løsningsforslag :



13. januar 2024