Arbeidshefte

Rekker

Induksjonsbevis

En påstand inneholder et naturlig tall n.

P(1) : Vis at formelen er gyldig for $n = 1$.

P(n) : Dette er påstanden (formelen) som vi antar er sann.

P(n+1) : Vis at dersom P(n) er sann så er også P(n+1) sann..

Da er påstanden sann for alle $n \in N$

Oppgave 1

Vis ved induksjon at $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in N$.

Oppgave 2

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ for alle $n \in N$.

Oppgave 3

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

Oppgave 4

Vis ved induksjon at $2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

Oppgave 5

Vis ved induksjon at $a_1 + a_2 + ... + (a_1 + d(n-1)) = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

Oppgave 6

Bevis summeformelen for en geometrisk rekke ved å bruke induksjonsbevis.

Oppgave 7

Vis ved induksjon at $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Oppgave 8

Vis ved induksjon at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Oppgave 9

Vis ved induksjon at $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Oppgave 10

Vis ved induksjon at $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$ for $n \in \{2, 3, 4, ...\}$

Oppgave 11

Vis ved induksjon at $\frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + ... + k^{n-1}$

Oppgave 12

Vis ved induksjon at $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Oppgave 13

Vis ved induksjon at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
$a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n - 1$

Oppgave 14

Vis ved induksjon at $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})...(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ for $n \in \{2,3,4,...\}$

Oppgave 15

Vis ved induksjon at $n! > n^2$ for $n \in \{4, 5, 6, 7, ...\}$

FASIT

Oppgave 1

Vis ved induksjon at $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in N$.
$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= 1\\ \text{Høyre side} &= \frac{(1+1)\cdot 1}{2}\\ &= \frac{2}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in N$.
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)\\ &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ \text{Høyre side} &= \frac{((n+1)+1)(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 2

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ for alle $n \in N$.
$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 1$$
$$\text{Høyre side} = 1^2 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.
Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\begin{aligned}
\text{Venstre side} &= 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n + 1)^2 \\
\text{Høyre side} &= (n + 1)^2
\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in N$.

$\blacksquare$

Oppgave 3

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

$P(1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= 3^{1-1} = 3^0 = 1 \\ \text{Høyre side} &= \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= 1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} + 3^{(n+1)-1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} + 3^n \\ &= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \\ \text{Høyre side} &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in N$.

$\blacksquare$

Oppgave 4

Vis ved induksjon at $2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

$P(1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= 2^1 = 2 \\ \text{Høyre side} &= 2^{1+1} - 2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$
Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \\ &= 2^{n+2} - 2 \\ \text{Høyre side} &= 2^{(n+1)+1} - 2 \\ &= 2^{n+2} - 2 \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in N$.

$\blacksquare$

Oppgave 5

Vis ved induksjon at $a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

$a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + d \cdot n - d$

$a_{n+1} = a_1 + d((n+1)-1) = a_1 + d \cdot n$

$s_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(a_1+(a_1+d(n-1)))n}{2} = \frac{(2a_1+d \cdot n-d)n}{2}$

$s_{n+1} = \frac{(2a_1+d((n+1)-1))(n+1)}{2} = \frac{(2a_1+d \cdot n)(n+1)}{2}$

$P(1):$

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= a_1 + d(1-1) \\ &= a_1 \\ \text{Høyre side} &= \frac{(a_1+a_1)\cdot 1}{2} \\ &= \frac{2a_1}{2} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n): a_1 + a_2 + ... + (a_1 + d(n-1)) = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$
Denne antas sann.

$P(n+1):$

$$\begin{aligned} \text{Venstre side} &= a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} \\ &= \frac{(a_1 + (a_1 + d(n-1)))n}{2} + (a_1 + d \cdot n) \\ &= \frac{(a_1 + a_1 + d \cdot n - d) \cdot n + 2(a_1 + d \cdot n)}{2} \\ &= \frac{2a_1 n + dn^2 - dn + 2a_1 + 2dn}{2} \\ &= \frac{2a_1 n + dn^2 + 2a_1 + dn}{2} \\ \text{Høyre side} &= \frac{(a_1 + a_{n+1})n}{2} \\ &= \frac{(2a_1 + dn)(n+1)}{2} \\ &= \frac{2a_1 n + dn^2 + 2a_1 + dn}{2} \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 6

Bevis summeformelen for en geometrisk rekke ved å bruke induksjonsbevis.

$a_1 + a_2 + ... + a_n = s_n$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

$a_{n+1} = a_1 \cdot k^n$

$s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$

$s_{n+1} = a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k-1}$

$P(1):$

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= a_1 \cdot k^{1-1} = a_1 \\ \text{Høyre side} &= a_1 \frac{k^1 - 1}{k-1} = a_1 \frac{k-1}{k-1} = a_1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : a_1 + a_2 + ... + a_1 \cdot k^{n-1} = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$
Denne antas sann.

$P(n+1):$

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= a_1 + a_2 + ... + a_1 \cdot k^{n-1} + a_1 \cdot k^{(n+1)-1} \\ &= a_1 \frac{k^n - 1}{k-1} + a_1 \cdot k^n \\ &= a_1 \frac{k^n - 1 + k^n(k-1)}{k-1} \\ &= a_1 \frac{k^n - 1 + k^{n+1} - k^n}{k-1} \\ &= a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k-1} \\ \text{Høyre side} &= a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k-1}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 7

Vis ved induksjon at $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$P(1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side } &= 1^3 = 1 \\ \text{Høyre side} &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side } &= 1 + 8 + 27 + ... + n^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ \text{Høyre side} &= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 8

Vis ved induksjon at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$P(1)$:

$$\text{Venstre side } = (x^1)' = x' = 1$$
$$\text{Høyre side} = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side } = (x^{n+1})' = (n+1)x^{n+1-1} = (n+1)x^n$$
$$\text{Høyre side} = (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 9

Vis ved induksjon at $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= 1^2 = 1 \\ \text{Høyre side} &= \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= 1 + 4 + 9 + ... + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6))}{6} \\ \text{Høyre side} &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 10

Vis ved induksjon at $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+....+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$ for $n \in \{2,3,4,...\}$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

$P(2):$

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2}\\ \text{Høyre side} &= \frac{2!-1}{2!} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n): \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+....+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$ Denne antas sann.

$P(n+1):$

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+....+\frac{n-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}\\ &= \frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}\\ &= \frac{(n!-1)(n+1)!+n\cdot n!}{n!(n+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)!-(n+1)!+n\cdot n!}{n!(n+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)!-n!(n+1)+n\cdot n!}{n!(n+1)!}\\ &= \frac{n!((n+1)!-(n+1)+n)}{n!(n+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}\\ \text{Høyre side} &= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

∎

Oppgave 11

Vis ved induksjon at $\frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + ... + k^{n-1}$
$P(1)$:

$$\text{Venstre side } = \frac{k^1-1}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} = 1$$
$$\text{Høyre side} = k^{1-1} = k^0 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n)$: $\frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + ... + k^{n-1}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \frac{k^{n+1}-1}{k-1}\\ \text{Høyre side} &= 1 + k + k^2 + ... + k^{n-1} + k^n\\ &= \frac{k^n-1}{k-1} + k^n\\ &= \frac{(k^n-1) + k^n(k-1)}{k-1}\\ &= \frac{k^n - 1 + k^{n+1} - k^n}{k-1}\\ &= \frac{k^{n+1}-1}{k-1}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 12

Vis ved induksjon at $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= 1^3 = 1\\ \text{Høyre side} &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3\\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\ \text{Høyre side} &= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 13

Vis ved induksjon at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
$a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n - 1$

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \frac{1(1-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \text{Høyre side} &= a_1 = -1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \\ \text{Høyre side} &= a_n + n - 1 \\ &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n(n-3) + 2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 14

Vis ved induksjon at $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})...(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ for $n \in \{2,3,4,...\}$

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\\ \text{Høyre side} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for n=1

$P(n) : (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})...(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side } &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \frac{n}{n(n+1)}\\ &= \frac{1}{n+1}\\ \text{Høyre side} &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n.

■

Oppgave 15

Vis ved induksjon at $n! > n^2$ for $n \in \{4, 5, 6, 7, ...\}$

$P(4)$:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side } &= 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ \text{Høyre side } &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

$P(n) : n! > n^2$, antas sann

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1)! &> (n+1)^2 \\ (n+1) \cdot n! &> (n+1)(n+1) \\ n! &> n+1 \\ n! &> n^2 > n+1 \\ \text{altså er } : n! &> n+1 \end{aligned}$$

Da har vi bevist at $n! > n^2$ for $n \in \{4, 5, 6, 7, ...\}$.

■

Vi har i beviset ovenfor sagt at vi vet at :
$n^2 > n+1$ når $x \in \{4, 5, 6, 7, ...\}$
og at dersom $n^2 > n+1$ og $n! > n^2$ så er også $n! > n+1$
Vi kan bevise dette også :

$$\begin{aligned} P(2) &: \\ 2^2 &> 2+1 \\ P(n) &: \\ n^2 &> n+1 \text{ når } x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\} \\ P(n+1) &: \\ (n+1)^2 &> (n+1)+1 \\ n^2 + 2n + 1 &> (n+1)+1 \\ n^2 + 2n &> n+1 \\ \text{Vi vet at } 2n &> n+1 \\ \text{da vil også } n^2 + 2n &> n+1 \end{aligned}$$