

Arbeidshefte

Rekker

Induksjonsbevis

Oppgave 1

Vis ved induksjon at $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 2

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 3

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

Oppgave 4

Vis ved induksjon at $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

Oppgave 5

Vis ved induksjon at $a_1 + a_2 + \dots + (a_1 + d(n - 1)) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Oppgave 6

Bevis summeformelen for en geometrisk rekke ved å bruke induksjonsbevis.

Oppgave 7

Vis ved induksjon at $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Oppgave 8

Vis ved induksjon at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Oppgave 9

Vis ved induksjon at $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Oppgave 10

Vis ved induksjon at $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$ for $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

Oppgave 11

Vis ved induksjon at $\frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$

Oppgave 12

Vis ved induksjon at $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Oppgave 13

Vis ved induksjon at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n - 1$

Oppgave 14

Vis ved induksjon at $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ for $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

FASIT

Oppgave 1

Vis ved induksjon at $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= 1 \\ \text{Høyre side} &= \frac{(1+1) \cdot 1}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \text{Høyre side} &= \frac{((n+1)+1)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 2

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 1$$

$$\text{Høyre side} = 1^2 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\text{Venstre side} = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

$$\text{Høyre side} = (n + 1)^2$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in \mathbb{N}$.



Oppgave 3

Vis ved induksjon at $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 3^{1-1} = 3^0 = 1$$

$$\text{Høyre side} = \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\text{Venstre side} = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} + 3^{(n+1)-1}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in \mathbb{N}$.



Oppgave 4

Vis ved induksjon at $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 2^1 = 2$$

$$\text{Høyre side} = 2^{1+1} - 2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+2} - 2$$

$$\text{Høyre side} = 2^{(n+1)+1} - 2$$

$$= 2^{n+2} - 2$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle $n \in \mathbb{N}$.



Oppgave 5

Vis ved induksjon at $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = a_1 + d \cdot n - d$$

$$a_{n+1} = a_1 + d((n + 1) - 1) = a_1 + d \cdot n$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + (a_1 + d(n-1)))n}{2} = \frac{(2a_1 + d \cdot n - d)n}{2}$$

$$s_{n+1} = \frac{(2a_1 + d((n+1)-1))(n+1)}{2} = \frac{(2a_1 + d \cdot n)(n+1)}{2}$$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = a_1 + d(1 - 1)$$

$$= a_1$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2}$$

$$= \frac{2a_1}{2}$$

$$= a_1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$$P(n) : a_1 + a_2 + \dots + (a_1 + d(n - 1)) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\text{Venstre side} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

$$= \frac{(a_1 + (a_1 + d(n - 1)))n}{2} + (a_1 + d \cdot n)$$

$$= \frac{(a_1 + a_1 + d \cdot n - d) \cdot n + 2(a_1 + d \cdot n)}{2}$$

$$= \frac{2a_1n + dn^2 - dn + 2a_1 + 2dn}{2}$$

$$= \frac{2a_1n + dn^2 + 2a_1 + dn}{2}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(a_1 + a_{n+1})n}{2}$$

$$= \frac{(2a_1 + dn)(n + 1)}{2}$$

$$= \frac{2a_1n + dn^2 + 2a_1 + dn}{2}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 6

Bevis summeformelen for en geometrisk rekke ved å bruke induksjonsbevis.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot k^n$$

$$s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

$$s_{n+1} = a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = a_1 \cdot k^{1-1} = a_1$$

$$\text{Høyre side} = a_1 \frac{k^1 - 1}{k - 1} = a_1 \frac{k - 1}{k - 1} = a_1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$$P(n) : a_1 + a_2 + \dots + a_1 \cdot k^{n-1} = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\text{Venstre side} = a_1 + a_2 + \dots + a_1 \cdot k^{n-1} + a_1 \cdot k^{(n+1)-1}$$

$$= a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} + a_1 \cdot k^n$$

$$= a_1 \frac{k^n - 1 + k^n(k - 1)}{k - 1}$$

$$= a_1 \frac{k^n - 1 + k^{n+1} - k^n}{k - 1}$$

$$= a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

$$\text{Høyre side} = a_1 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .

■

Oppgave 7

Vis ved induksjon at $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 1^3 = 1$$

$$\text{Høyre side} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 8

Vis ved induksjon at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = (x^1)' = x' = 1$$

$$\text{Høyre side} = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = (x^{n+1})' = (n+1)x^{n+1-1} = (n+1)x^n$$

$$\text{Høyre side} = (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 9

Vis ved induksjon at $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 1^2 = 1$$

$$\text{Høyre side} = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 10

Vis ved induksjon at $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$ for $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$P(2)$:

$$\text{Venstre side} = \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{2!-1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$ Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(n!-1)(n+1)! + n \cdot n!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)! - (n+1)! + n \cdot n!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)! - n!(n+1) + n \cdot n!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{n!((n+1)! - (n+1) + n)}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .

■

Oppgave 11

Vis ved induksjon at $\frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = \frac{k^1 - 1}{k - 1} = \frac{k - 1}{k - 1} = 1$$

$$\text{Høyre side} = k^{1-1} = k^0 = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $\frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$

Denne antas sann.

$P(n + 1)$:

$$\text{Venstre side} = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

$$\text{Høyre side} = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1} + k^n$$

$$= \frac{k^n - 1}{k - 1} + k^n$$

$$= \frac{(k^n - 1) + k^n(k - 1)}{k - 1}$$

$$= \frac{k^n - 1 + k^{n+1} - k^n}{k - 1}$$

$$= \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 12

Vis ved induksjon at $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(1)$:

$$\text{Venstre side} = 1^3 = 1$$

$$\text{Høyre side} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\text{Venstre side} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\text{Høyre side} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .

■

Oppgave 13

Vis ved induksjon at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n - 1$

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= \frac{1(1-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \text{Høyre side} &= a_1 = -1\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side, altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$
Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \\ \text{Høyre side} &= a_n + n - 1 \\ &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n(n-3) + 2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side, da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .



Oppgave 14

Vis ved induksjon at $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ for $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

$P(1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{Høyre side} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , altså er formelen gyldig for $n=1$

$P(n)$: $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

Denne antas sann.

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\text{Venstre side} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ \text{Høyre side} &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Høyre side = Venstre side , da har vi bevist at denne formelen er gyldig for alle positive heltallige verdier av n .

■