

Rekker

Geometriske rekker

Konvergens, variabel koeffisient , konvergensområdet

Geometrisk rekke

Eksplisitt formel : $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Rekursiv formel : $a_n = a_{n-1} \cdot k$

Sum : $s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$

Konvergent geometrisk rekke : $k \in \langle -1, 1 \rangle$

Uendelig , konvergent rekke : $s = \frac{a_1}{1-k}$

Forklaring av sum-formelen

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} k^n &= 0 \text{ når } k \in \langle -1, 1 \rangle \\
 &= a_1 \cdot \frac{-1}{k - 1} \\
 &= \frac{a_1}{1 - k}
 \end{aligned}$$

Geogebra

$a_1 :=$

$k :=$

$a(n) := a_1 \cdot k^{n-1}$

$s(n) := \text{sum}[a_n, n, 1, n]$ ($\text{Følge}[a_n, n, 1, n]$)

$\text{RektangeSum}(a, 0, 5, 5, 1)$

$\text{RektangelSum}(\text{funksjon}, \text{start}, \text{slutt}, \text{step}, \text{startpunkt})$

Eksempel

Vi har en rekke

$$16 + 8 + 4 + 2 + \dots$$

Finner $k = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Det n -te leddet er : $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^4}{2^{n-1}} = 2^{5-n}$

Når antall ledd går mot uendelig vil størrelsen på leddet gå mot null.

Sum for rekka når den er uendelig : $S = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$

Da sier vi at rekka konvergerer mot 32.

Oppgave 1

Finn k

Finn en rekursiv og en eksplisitt formel.

Finn en formel for sum av de n første leddene.

Finn summen av rekka dersom den er uendelig.

1) $4 + 2 + 1 + \dots + a_n = s_n$

2) $8 - 4 + 2 \dots$

3) $625 + 125 + 25 + 5 + \dots$

4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$

Rekker med variabel koeffisient

Eksempel

Rekke med variabel koeffisient - leddene inneholder en variabel x .

$$x + 2x + 3x + 4x + \dots$$

$$x = 1 : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$x = 2 : 2 + 4 + 6 + 8 + \dots$$

$$x = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots$$

Oppgave 2

Undersøk om rekka er geometrisk, og finn k dersom mulig.

- 1) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
- 2) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
- 3) $1 + \sin x + (\sin x)^2 + \dots$
- 4) $e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots$
- 5) $2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3} + \dots$
- 6) $x + x^3 + x^5 + \dots$
- 7) $-1 + \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots$
- 8) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$
- 9) $(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + \dots$
- 10) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

Konvergensområde

Eksempel

Konvergensområdet er de verdiene den variable koeffisienten må ha hvis rekke skal konvergere mot en verdi a .

Vi bruker definisjonen av konvergens :

$$k \in \langle -1, 1 \rangle$$

Vi har rekka

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

Her er $k = 2x$,

$$-1 < k < 1$$

$$-1 < 2x < 1$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

da vil konvergensområdet være $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

dvs. rekka er konvergent for x -verdier i dette området.

Oppgave 3

$$2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller 4.

Oppgave 4

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være -1, eller 2.

Oppgave 5

$$e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller -2.

Oppgave 6

$$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller 4.

Oppgave 7

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller 4.

Oppgave 8

$$1 + (x + 2) + (x + 2)^2 + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller $-\frac{1}{2}$.

Oppgave 9

$$(1 - x) + (1 - x)^2 + (1 - x)^3 + \dots$$

- 1) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- 2) Finn en funksjon for summen av den uendelige rekka.
- 3) Undersøk om summen av den uendelige rekka kan være 1, eller $-\frac{1}{2}$.

Oppgave 10

$$-2, 4, -8, 16, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 11

$$-1, -3, -6, -10, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 12

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 13

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 14

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 15

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 16

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 17

$$5, 9, 13, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 18

$$11, 22, 33, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 19

$$100, 50, 25, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 20

$$100, 98, 96, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Oppgave 21

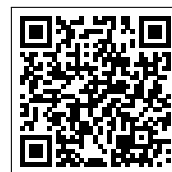
$$3, -4, \frac{16}{3}, -\frac{64}{9}, \dots$$

- 1) Skriv de neste tre tallene i tallfølgen
- 2) Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
- 3) Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig)

Dette arbeidshefte :



Løsningsforslag :



13. januar 2024