Arbeidshefte

Rekker

Aritmetisk rekke :
Eksplisitt formel : $a_n = a_1 + d(n-1)$
Rekursiv formel : $a_n = a_{n-1} + d$
Sum : $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Geometrisk rekke :
Eksplisitt formel : $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Rekursiv formel : $a_n = a_{n-1} \cdot k$
Sum : $s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$

Konvergent geometrisk rekke : $k \in \langle -1, 1 \rangle$
Uendelig , konvergent rekke : $s = \frac{a_1}{1-k}$

Eksplisitt formel beskriver det n-te leddet ved leddnummer og a_1
Rekursiv formel beskriver det n-te leddet ved forrige ledd

Geogebra : $Sum[a_n, n, 1, n]$, $Følge[a_n, n, 1, n]$

Mønster i tallfølger

Oppgave 1

Finn mønsteret og skriv ned de tre neste tallene :

1) $2, 4, 6, 8, ...$

2) $1, 4, 9, 16, ...$

3) $3, 6, 9, 12, ...$

4) $1, 8, 27, 64, ...$

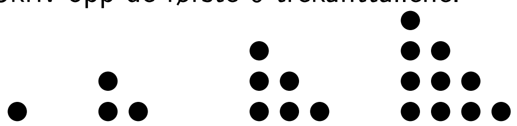
5) $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

6) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$

Trekanttallene

Oppgave 2

Skriv opp de første 6 trekanttallene.

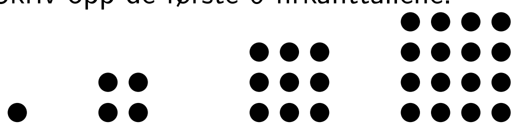


a_1 a_2 a_3 a_4

Firkanttallene (Kvadrattallene)

Oppgave 3

Skriv opp de første 6 firkanttallene.

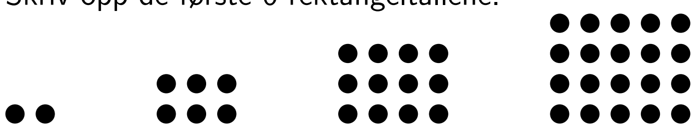


a_1 a_2 a_3 a_4

Rektangeltallene

Oppgave 4

Skriv opp de første 6 rektangeltallene.



a_1 a_2 a_3 a_4

Aritmetiske rekker

Aritmetisk rekke :	
Eksplisitt formel :	$a_n = a_1 + d(n-1)$
Rekursiv formel :	$a_n = a_{n-1} + d$
Sum :	$s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Oppgave 5

Finn en rekursiv og eksplisitt formel for det n-te leddet.
Finn en formel for summen av rekka.

1) $2+4+6+...+a_n = s_n$

2) $3+6+9+...+a_n = s_n$

3) $5+10+15+...+a_n = s_n$

4) $8+5+2+....+a_n = s_n$

5) $2+6+10+...+a_n = s_n$

6) $2+5+8+11+...+a_n = s_n$

7) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+....+a_n = s_n$

8) $99+90+81+....+a_n = s_n$

Ledd nummer n $= a_n$

Oppgave 6

Finn de fem første leddene i tallfølgen :

1) $a_2 = 4, d = 2$

2) $a_1 = 5, a_6 = 15$

3) $a_1 = 1, d = 4$

4) $a_5 = 24, a_{12} = 45$

Geometriske rekker

Geometrisk rekke :
Eksplisitt formel : $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Rekursiv formel : $a_n = a_{n-1} \cdot k$
Sum : $s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$

Oppgave 7

Finn en rekursiv og eksplisitt formel for det n-te leddet.
Finn en formel for summen av rekka.

1) $1 + 2 + 4 + 8 + ... + a_n = s_n$

2) $2 + 6 + 18 + ... + a_n = s_n$

3) $80 + 40 + 20 + ... + a_n = s_n$

4) $5 + 10 + 20 + ... + a_n = s_n$

5) $1 + 3 + 9 + 27 + ... + a_n = s_n$

6) $3 + 15 + 75 + ... + a_n = s_n$

7) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + a_n = s_n$

Konvergente geometriske rekker

Konvergent geometrisk rekke :	$k \in \langle -1, 1 \rangle$
Uendelig , konvergent rekke :	$s = \frac{a_1}{1-k}$

Oppgave 8

Finn en rekursiv og en eksplisitt formel for ledd nummer n, og en formel for de n første leddene. Finn summen av rekka dersom den er uendelig.

1) $4 + 2 + 1 + ... + a_n = s_n$

2) $8 - 4 + 2....$

3) $625 + 125 + 25 + 5 + ...$

4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + ...$

Rekker med variabel koeffisient

Oppgave 9

Undersøk om rekka er geometrisk, og finn k dersom mulig.

1) $1 + x + x^2 + x^3 + ...$

2) $1 - x + x^2 - x^3 + ...$

3) $1 + \sin x + (\sin x)^2 + ...$

4) $e^x + e^{2x} + e^{3x} + ...$

5) $2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3} + ...$

6) $x + x^3 + x^5 + ...$

7) $-1 + \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - ....$

8) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^2 + ...$

9) $(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + ...$

10) $1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + ...$

Konvergensområde

Oppgave 10

For hvilke verdier av x konvergerer rekka?

1) $2x + 4x + 8x + ...$

2) $e^x + e^{2x} + e^{3x} + ...$

3) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ...$

Oppgave 11

Hva slags følge/rekke er dette? Aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene.
Finn en rekursiv og en eksplisitt formel (dersom mulig), skriv de neste tre tallene i tallfølgene :

1) $-2, 4, -8, 16, ...$

2) $-1, -3, -6, -10, ...$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ...$

4) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$

5) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

6) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, ...$

7) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, ...$

8) $5, 9, 13, ...$

9) $11, 22, 33, ...$

10) $100, 50, 25, ...$

11) $100, 98, 96, ...$

12) $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + ...$

FASIT

Oppgave 1

1) $..., 10, 12, 14$, $a_n = 2n$
2) $..., 25, 36, 49$, $a_n = n^2$
3) $..., 15, 18, 21$. $a_n = 3n$
4) $..., 125, 216, 343$, $a_n = n^3$
5) $..., 13, 21, 34$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
6) $..., \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$, $a_n = (\frac{2}{3})^{n-1}$

Oppgave 2

$1, 3, 6, 10, 15, 21$, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Oppgave 3

$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$, $a_n = n^2$

Oppgave 4

$2, 6, 12, 20, 30, 42$

Oppgave 5

1) $a_n = 2n$	$a_n = a_{n-1} + 2$	$s_n = n(n+1)$
2) $a_n = 3n$	$a_n = a_{n-1} + 3$	$s_n = \frac{3n(n+1)}{2}$
3) $a_n = 5n$	$a_n = a_{n-1} + 5$	$s_n = \frac{5n(n+1)}{2}$
4) $a_n = 11 - 3n$	$a_n = a_{n-1} - 3$	$s_n = \frac{n(19-3n)}{2}$
5) $a_n = 4n - 2$	$a_n = a_{n-1} + 4$	$s_n = 2n^2$
6) $a_n = 3n - 1$	$a_n = a_{n-1} + 3$	$s_n = \frac{n(3n+1)}{2}$
7) $a_n = \frac{n}{4}$	$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4}$	$s_n = \frac{n(n+1)}{8}$
8) $a_n = 108 - 9n$	$a_n = a_{n-1} - 9$	$s_n = \frac{n(207-9n)}{2}$

Oppgave 6

1) $2, 4, 6, 8, 10$
2) $5, 7, 9, 11, 13, 15$
3) $1, 5, 9, 13, 17$
4) $12, 15, 18, 21, 24$

Oppgave 7

1) $a_n = 2^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot 2 = 2a_n$ $\quad s_n = 2^n - 1$
2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot 3 = 3a_n$ $\quad s_n = 3^n - 1$
3) $a_n = 80 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_n$ $\quad s_n = -160(1 - \frac{1}{2n})$
4) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot 2 = 2a_n$ $\quad s_n = 5(2^n - 1)$
5) $a_n = 3^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot 3 = 3a_n$ $\quad s_n \frac{3^n-1}{2}$
6) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot 5 = 5a_n$ $\quad s_n = \frac{3(5^n-1)}{4}$
7) $a_n = (\frac{1}{2})^n$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ $\quad s_n = -\frac{1-2^n}{2^n}$

Oppgave 8

1) $a_n = 2^{3-n}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ $\quad S = 8$
2) $a_n = 8 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1} = -2^{4-n}$ $\quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \cdot$ $\quad s = \frac{16}{3}$
3) $a_n = 625 \cdot (\frac{1}{5})^{n-1} = 5^{5-n}$ $\quad s = \frac{3125}{4}$
4) $a_n = (\frac{1}{4})^n$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $\quad s = \frac{1}{3}$

Oppgave 9

Finn a_n og s_n.
Finn rekkas konvergensområde, og summen av den uendelige rekka.

1) $k = x, a_n = x^{n-1}, s_n = \frac{x^n-1}{x-1}$
   Konvergerer for $x \in \left\langle -1, 1 \right\rangle$, $s = \frac{1}{1-x}$
2) $k = -x$, $a_n = (-x)^{n-1}, s_n = \frac{(-x)^n-1}{-x-1}$
   Konvergerer når $x \in \left\langle -1, 1 \right\rangle$, $s = \frac{1}{-1-x}$
3) $k = \sin x$, $a_n = (\sin x)^{n-1}$
4) $k = e^x$, $(e^x)^n$, $s_n = \frac{(e^x)^{n+1}-e^x}{e^x-1}$
   Konvergerer for $x \in \left\langle \leftarrow, 0 \right\rangle$
5) $k = \frac{2}{x}$, $a_n = \frac{2^{n+1}}{x^n}$
   Konvergerer for $x > 2$

Oppgave 10

1) Denne vil aldri konvergere fordi k alltid vil være k=2
2) Rekka konvergerer for $x < 0$
3) Rekka konvergerer for $x > 0$

Oppgave 11

1) $-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$
Geometrisk $\quad k = -2$
$a_{n+1} = -2a_n \qquad a_n = (-2)^n$

2) $-1, -3, -6, -10, -15, -21, -28, -35$
Avstanden mellom leddene er -2,-3,-4,-5 etc.

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 5}, \frac{1}{2 \cdot 6}, \frac{1}{2 \cdot 7}$

4) $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2},$

5) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9},$

6) $\frac{2}{3}, (\frac{2}{3})^2, (\frac{2}{3})^3, (\frac{2}{3})^4, (\frac{2}{3})^5, (\frac{2}{3})^6, (\frac{2}{3})^7, (\frac{2}{3})^8,$

7) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8},$

8) $5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33$
Aritmetisk
$d = 4 \qquad a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \qquad a_{n+1} = a_n + 4$

9) $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99,$

10) $100, 50, 25, 12.5, 6.25, 3.125, 1.5625,$
Geometrisk $\quad k = \frac{1}{2}$

11) $100, 98, 96, 94, 92, 90, 88,$
Aritmetisk $\quad d = -2$
$a_{n+1} = a_n - 2 \qquad a_n = 102 - 2n$

12) $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9}$
Geometrisk $\quad k = -\frac{4}{3}$
$a_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n \ a_n = 3 \cdot (-\frac{4}{3})$

Eksamensoppgaver - Del 1

Oppgave (R2 V14 1-3)

$$S(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + ...$$

$k = \frac{1-x}{1} = 1 - x$
Derom rekka konvergerer må $k \in \Big\langle -1, 1 \Big\rangle$

$$\begin{aligned} -1 < (1-x) < 1 \\ -2 < -x < 0 \\ 2 > x > 0 \end{aligned}$$

Konvergensområdet er da : $x \in \Big\langle 0, 2 \Big\rangle$ $S(x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$

$S(x) = 3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Denne løsningen er gyldig siden $x = \frac{1}{3}$ ligger innenfor konvergensområdet.

$S(x) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Denne løsningen er ikke gyldig siden $x = 3$ ligger utenfor konvergensområdet.

Oppgave (R2 V13 1)

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + a_n$$

Dette er en aritmetisk rekke : $d = 2$

$a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$
$a_{16} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$
$S_{16} = 16^2 = 256$

$S_n > 400$
$n^2 > 400$
$n > 20$

For at summen skal blir større enn 400 må vi ha minst 20 ledd.

Oppgave (R2 H13 1)

$$1 + e^{-x} + e^{-2} + e^{-3} + ...$$

$k = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$-1 < \frac{1}{e} < 1$, altså en konvergent rekke.

$S = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ...$$

$k = \frac{1}{e^x}$
dersom $-1 < \frac{1}{e^x} < 1$, er dette en konvergent rekke.

$\frac{1}{e^x} > 0$ for alle verdier av x.

$\frac{1}{e^x} < 1$
$e^{-x} < 1$
$-x < 0$
$x > 0$
$S = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$