Arbeidshefte

Romgeometri

Parameterframstilling av linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Retningsvektor : $\vec{r} = [a, b, c]$

Punkt i planet : $P(x_0, y_0.z_0)$

Likningen for et plan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Avstand fra punkt til linje

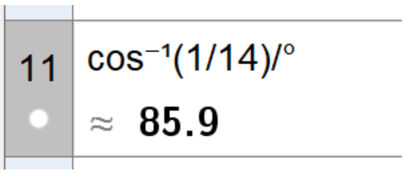
$$q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

Avstand fra punkt til plan

$$q = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$P = (x_1, y_1, z_1)$



Parameterframstilling for en linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Retningsvektor : $\vec{r} = [a, b, c]$

Punkt i planet : $P(x_0, y_0.z_0)$

Oppgave 1

Sett opp en parameterframstilling for l som går gjennom punktet S og har retningsvektoren $\vec{r}$.

1) $S(2, 4, 4)$, $\vec{r} = [1, 2, 2]$

2) $S(-4, 2, -1)$, $\vec{r} = [-1, 3, 1]$

3) $S(-1, 1, -2)$, $\vec{r} = [3, -2, 4]$

4) $S(0, 1, -4)$, $\vec{r} = [1, 0, -1]$

5) $S(7, -4, 0)$, $\vec{r} = [5, 2, -2]$

6) $S(1, 2, 3)$, $\vec{r} = [2, 1, -1]$

7) $S(0, 0, 0)$, $\vec{r} = [1, 2, -1]$

8) $S(0, 1, -1)$, $\vec{r} = [0, 1, 0]$

Oppgave 2

Finn en parameterframstilling for linja l som går gjennom A og B, og sjekk om punktet C ligger på linja.

1) $A(1,-1,2)$, $B(3,4,-1)$, $C(5,9,-4)$

2) $A(0,-3,1)$, $B(-2,-2,-1)$, $C(-8,2,2)$

3) $A(-1,-1,2)$, $B(-1,1,-1)$, $C(4,5,-2)$

4) $A(-2,2,-3)$, $B(4,5,-2)$, $C(-2,2,4)$

5) $A(1,0,3)$, $B(2,1,0)$, $C(1,0,3)$

6) $A(4,0,2)$, $B(3,5,1)$, $C(4,0,2)$

7) $A(1,1,1)$, $B(3,3,2)$, $C(-1,-1,0)$

Oppgave 3

Finn retningsvektoren, og bestem skjæringspunktet med xy-planet.

1) $l = \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

2) $l = \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

3) $l = \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

4) $l = \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$

5) $l = \begin{cases} x = -6 - 4t \\ y = -1 + 4t \\ z = -7 - 3t \end{cases}$

6) $l = \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$

Likningen til et plan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Oppgave 4

Finn likningen til planet som har normalvektor $\vec{n}$ og går gjennom punktet P.

1) $\vec{n} = [2, -1, 3]$, $P(-1, 3, 1)$.

2) $\vec{n} = [-1, 3, 1]$, $P(0, 2, -1)$.

3) $\vec{n} = [4, -2, -1]$, $P(-1, 1, 0)$.

4) $\vec{n} = [-3, -2, 1]$, $P(2, 2, 4)$.

5) $\vec{n} = [0, -1, -1]$, $P(1, 0, 1)$.

Oppgave 5

Vi har punktene A , B og C. Finn likningen til planet som går gjennom punktene A, B og C. Sjekk om punktet $(3, -2, 2)$ ligger i planet .

1) $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 4)$.

2) $A(-1, 2, 4)$, $B(1, 1, -2)$ og $C(1, 1, 2)$.

3) $A(-2, 1, 3)$, $B(1, 0, -4)$ og $C(-2, 5, 1)$.

4) $A(1, -2, 1)$, $B(1, 2, 0)$ og $C(3, 0, -1)$.

Avstand fra punkt til linje

$$q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

Oppgave 6

Linja l går gjennom A og B, finn en parameterframstilling til linja. Finn avstanden fra linja til punktet P

1) $A(-2, 4, 1)$, $B(-5, 7, -2)$, $P(1, 1, 1)$

2) $A(-3, 1, -1)$, $B(-1, 0, -2)$, $P(-1, 0, 1)$

3) $A(4, -3, 0)$, $B(5, 1, -1)$, $P(2, 2, 0)$

Avstand fra punkt til plan

$$q = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

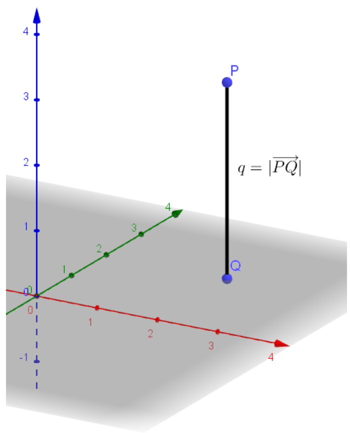
$\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$P = (x_1, y_1, z_1)$

Eksempel

Vi har planet $\alpha : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$
og punktet $P(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} q &= \left| \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{2 + 6 - 6 + 1}{\sqrt{4 + 9 + 4}} \right| \\ &= \left| \frac{3}{\sqrt{17}} \right| = \frac{3}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$



Oppgave 7

Finn avstanden mellom punktet P og planet α :

1) $P(-1, 4, 5)$, $\alpha : 2x - y + 3z - 21 = 0$

2) $P(0, 0, 0)$, $\alpha : 4x + 3y + 3z = 12$

3) $P(0, 0, 0)$, $\alpha : x + y + z - 6 = 0$

4) $P(2, -8, 7)$, $\alpha : 2x + 3y - z - 1 = 0$

5) $P(1, 2, -1)$, $\alpha : x - z = 0$

Vinkel mellom 2 plan

Oppgave 8

Finn vinkelen mellom planene.

1) $\alpha : 2x - y + 3z + 3 = 0$, $\beta : -x + 3y + 2z + 1 = 0$

2) α går gjennom $A(1,0,1), B(0,1,1), C(0,0,2)$ og β går gjennom $D(1,1,0), E(2,0,1), F(0,1,1)$

Skjæringslinje mellom 2 plan

Retningsvektoren til linja står vinkelrett på normalvektoren til begge planene.

Oppgave 9

To plan er gitt ved α og β. Planene skjærer hverandre langs ei linje l, finn en parameterframstilling for linja.

1) $\alpha \; : \; -2x + y + z - 2 = 0$ og $\beta \; : \; x - y - z = 0$

2) $\alpha \; : \; 2x - y + 3z + 3 = 0$ og $\beta \; : \; -x + 3y + 2z + 1 = 0$

Sirkel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Senter av sirkelen : $S(x_0, y_0,)$

Radien til sirkelen : r

Oppgave 10

Bestem likningen til sirkelen som har senter i A og radien r.

1) $A(1, -1)$ og $r = 2$

2) $A(2, 3)$ og $r = 1$

3) $A(1, 3)$ og $r = 6$

4) $A(-3, 1)$ og $r = 3$

5) $A(0, 1)$ og $r = 4$

Oppgave 11

Bestem senter og radius i følgende sirkellikninger

1) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = -1$

2) $x^2 + y^2 = 100$

3) $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$

4) $x^2 - 4x + y^2 = 12$

5) $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 16 = 0$

Kule

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Senter av sirkelen : $S(x_0, y_0, z_0)$

Radien til sirkelen : r

Oppgave 12

Bestem likningen til kula som har senter i S og radien r.

1) $S(2, 3, -1)$ og $r = 2$

2) $S(1, -1, 2)$ og $r = 3$

3) $S(-1, 3, -2)$ og $r = 1$

4) $S(3, 4, 1)$ og $r = 2$

5) $S(-2, 1, 1)$ og $r = \frac{1}{2}$

Oppgave 13

Likningen til en kuleflate er gitt, finn koordinatene til senter av kula og radien.

1) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z - 19 = 0$

2) $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 - 8z + 17 = 0$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 400$

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8z + 25 = 0$

5) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y - 9z = 9$

Flere oppgaver

Oppgave 14

Planet α er gitt ved $x + 2y - 3z - 4 = 0$.
Finn hvor planet skjærer koordinataksene.

Oppgave 15

Et plan inneholder $A(-2, 3, 5)$, $B(-10, 1, 9)$ og $C(0, 5, -4)$
Finn likningen for planet.
Sjekk om punktet $P(4, 6, -6)$ ligger i planet.

Oppgave 16

Et plan er utspent av $\vec{v} = [1, -2, 2]$ og $\vec{u} = [-3, 3, 1]$ og inneholder punktet $P(4, 6, -6)$
Finn likningen for planet.

Oppgave 17

$$l = \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Finn avstanden fra origo til linjen.

FASIT

Oppgave 1

1) $l = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

2) $l = \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

3) $l = \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$

4) $l = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -4 - t \end{cases}$

5) $l = \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -4 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$

6) $l = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

7) $l = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$

8) $l = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$

Oppgave 2

1) $l = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
t=2 , C ligger på linja

2) $l = \begin{cases} x = -2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$
C ligger IKKE på linja

3) $l = \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
C ligger IKKE på linja

4) $l = \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases}$
C ligger IKKE på linja

5) $l = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$
C ligger på linja

6) $l = \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 5t \\ z = 2 - t \end{cases}$
C ligger på linja

7) $l = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$
C ligger på linja

Oppgave 3

1) $\vec{r} = [2, 1, -2], S(-6, 0, 0)$

2) $\vec{r} = [3, 3, -1], S(8, 4, 0)$

3) $\vec{r} = [-2, 1, 4], S(-1, -\frac{1}{2}, 0)$

4) $\vec{r} = [0, 1, -1], S(3, -1, 0)$

5) $\vec{r} = [-4, 4, -3], S(\frac{10}{3}, -\frac{31}{3}, 0)$

6) $\vec{r} = [3, 0, -1], S(-3, 1, 0)$

Oppgave 4

1) $2(x+1)-(y-3)+3(z-1)=0 \Rightarrow 2x-y+3z+2=0$

2) $-x+3(y-2)+(z+1)=0 \Rightarrow -x+3y+z-5=0$

3) $4(x+1)-2(y-1)-z=0 \Rightarrow 4x-2y-z+6=0$

4) $-3(x-2)-2(y-2)+(z-4)=0 \Rightarrow -3x-2y+z+6=0$

5) $-y-(z-1)=0 \Rightarrow -y-z+1=0$

Oppgave 5

1) $4x+3y+3z-12=0$
P ligger i planet

2) $x+2y-3=0$
P ligger IKKE i planet

3) $5x+y+2z+3=0$
P ligger IKKE i planet

4) $3x+y+4z-5=0$
P ligger IKKE i planet

Oppgave 6

1) $\sqrt{6}$

2) $\frac{\sqrt{30}}{2}=2,74$

3) $\sqrt{11}=3,32$

Oppgave 7

1) $\frac{12}{\sqrt{14}}$

2) $\frac{12}{\sqrt{34}}$

3) $2\sqrt{3}$

4) $\frac{28}{\sqrt{117}}$

5) $\sqrt{2}$

Oppgave 8

1) 86^o

2) $19,5^o$

Oppgave 9

1) $l = \begin{cases} x=-2 \\ y=-t \\ z=-2+t \end{cases}$

2) $l = \begin{cases} x=-2-11t \\ y=-1-7t \\ z=5t \end{cases}$

Oppgave 10

1) $(x-1)^2+(y)^2=4 \Rightarrow x^2-2x+y^2+2y-3=0$
2) $(x-2)^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow x^2-4x+y^2-6y+12=0$
3) $(x-1)^2+(y-3)^2=36 \Rightarrow x^2-2x+y^2-6y-26=0$
4) $(x+3)^2+(y-1)^2=9 \Rightarrow x^2+6x+y^2-2y+1=0$
5) $x^2+(y-1)^2=16 \Rightarrow x^2+y^2-2y-15=0$

Oppgave 11

1) $S(-1,3), r=3$
2) $S(0,0), r=10$
3) $S(-2,1), r=3$
4) $S(2,0), r=4$
5) ikke likningen for en sirkel

Oppgave 12

1) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$
2) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$
3) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=1$
4) $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$
5) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$

Oppgave 13

1) $S(3,-2,2), r=6$
2) $S(-2,1,4), r=2$
3) $S(0,0,0), r=20$
4) $S(2,-3,-4), r=2$
5) $S(-\frac{3}{2},1,\frac{9}{2}), r=\sqrt{\frac{65}{2}}$

Oppgave 14

x-aksen : $(4,0,0)$ y-aksen : $(0,2,0)$ z-aksen : $(0,0,-\frac{4}{3})$

Oppgave 15

$\alpha : 5x-32y-6z+136=0$, P ligger i planet

Oppgave 16

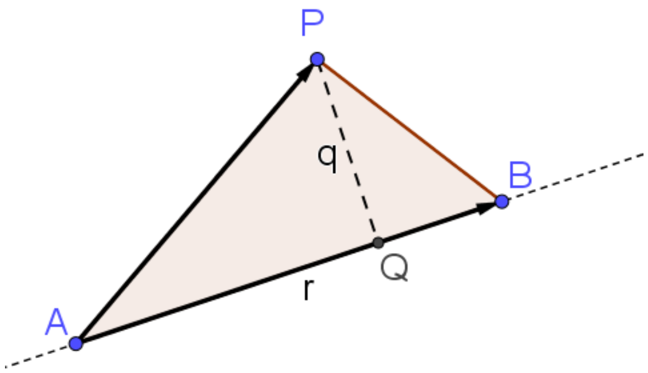
$8x + 7y + 3z - 56 = 0$

Oppgave 17

$q = 2\sqrt{5}$

Utledning av formler

Utledning av formelen for avstand fra punkt til linje - 1



$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$P(x_1, y_1, z_1)$

$A(x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{AP} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$

$\vec{r} = [a, b, c]$

Arealet av trekanten :

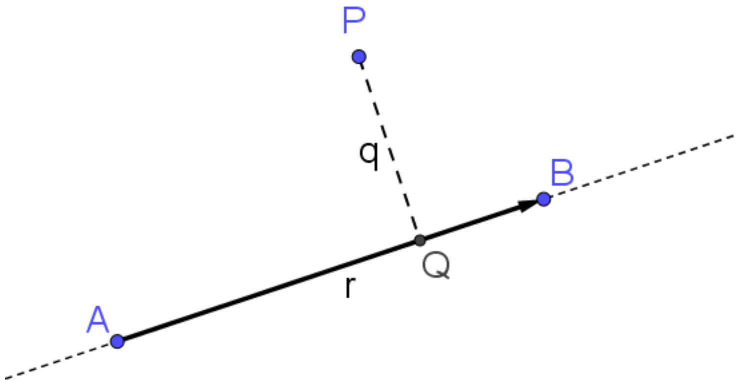
$A_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|$

$A_2 = \frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot q$

$A_1 = A_2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right| = |\vec{r}| \cdot q \ \Rightarrow \ q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$

$$\boxed{q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}}$$

Utledning av formelen for avstand fra punkt til linje - 2



$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$Q(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

$P(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r} = [a, b, c]$

$\overrightarrow{PQ} = [(x_0 + at) - x_1, (y_0 + bt) - y_1, (z_0 + ct) - z_1]$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0$

$q = |\overrightarrow{PQ}|$

Utledning av formelen for avstand fra punkt til plan

Punkt utenfor planet : $P(x_1, y_1, z_1)$

Punkt i planet : $Q(x, y, z)$

Normalvektor : $\vec{n} = [a, b, c]$, $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Likning for planet : $ax + by + cz + d = 0$

Avstanden fra P til planet : $q = |\overrightarrow{PQ}|$

$ax + by + cz + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -(ax + by + cz)$

$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^o$ eller $\cos 180^o = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}|$

$\overrightarrow{QP} = [(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)]$

$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z)$

$a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z) = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}|$

$ax_1 - ax + by_1 - by + cz_1 - cz = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}|$

$ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax + by + cz) = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}|$

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}|$

$q = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

$$\boxed{q = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|}$$