Arbeidshefte
Sannsynlighetsregning - 2

$$P(A) = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}}$$

$P(A) =$ Sannsynligheten for at hendelse A skal skje

$P(\bar{A}) =$ Sannsynligheten for at hendelse A IKKE skal skje

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, Uavhengige hendelser

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, Avhengige hendelser

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, Uavhengige hendelser

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, Avhengige hendelser

Bayes' setning : $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$

Binomisk sannsynlighet : $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k(1-p)^{n-k}$

Hypergeometrisk sannsynlighet : $P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$

	Uten tilbakelegging	Med tilbakelegging
Ordnet utvalg	nPr $\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet utvalg	nCr $\frac{n!}{(n-r)!r!}$	

n = totalt antall , r= antall vi trekker

Med tilbakelegging : Trekker fra samme antallet hvert trekk
Uten tilbakelegging : Trekker fra en mindre for hvert trekk

Uordnet utvalg : Rekkefølgen er IKKE viktig
Ordnet utvalg : Rekkegølgen er viktig

Kombinatorikk

Eksempel
På hvor mange måter kan du kombinere bokstavene A,B og C?

- Bokstavene kan kun brukes én gang og rekkefølgen er ikke viktig
  ABC
  1 kombinasjon - Uten tilbakelegging - Uordnet
- Bokstavene kan kun brukes én gang og rekkefølgen er viktig
  ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
  6 kombinasjoner - Uten tilbakelegging - Ordnet
- Bokstavene kan brukes flere ganger og rekkefølgen er ikke viktig
  AAA, AAB, ABB, AAC, ACC, BBB, BBC, BCC, CCC, ABC - 10 kombinasjoner - Med tilbakelegging - Uordnet
- Bokstavene kan brukes flere ganger og rekkefølgen er viktig
  AAA, AAB, AAC, ABB, ACC, ABC, ACB, ABA, ACA,
  BBB, BBA, BBC, BAB, BCB, BAA, BCC, BAC, BCA,
  CCC, CCA, CCB, CAC, CBC, CAA, CBB, CAB, CBA
  27 kombinasjoner - Med tilbakelegging - Ordnet

Oppgave 1

Ordnet eller uorndet utvalg? Med eller uten tilbakelegging?

1) en PIN-kode?

2) lotteri?

3) bilskilt?

4) kaste en terning to ganger?

5) trekke fem kort fra en kortstokk?

6) trekke ut tre personer til et arbeidsutvalg?

	Uten tilbakelegging	Med tilbakelegging
Ordnet utvalg	nPr $\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet utvalg	nCr $\frac{n!}{(n-r)!r!}$	

Oppgave 2

Vi skal lage en kode på 3 bokstaver. Vi kan ikke bruke ÆØÅ. Hvor mange ulike kombinasjoner kan vi lage dersom hver bokstav kan :

1) ... brukes flere ganger, og rekkefølgen er viktig?

2) .... kun brukes en gang og rekkefølgen er viktig?

3) .... kun brukes en gang og rekkefølgen er ikke viktig?

Oppgave 3

Et bilskilt består av først to bokstaver og så fem siffer. Hvor mange ulike bilskilt kan vi lage dersom

1) ... alle siffer og bokstaver kan brukes flere ganger?

2) ... det føste sifferet ikke kan være null?

3) ... det må starte med A?

Oppgave 4

I lotto er det 34 tall totalt, en rekke er 7 tall.

1) Hvor mange ulike kombinasjoner kan vi spille?

2) Hva er sannsynligheten for å vinne derson vi spiller én rekke?

Flere hendelser

Oppgave 5

Jeg har seks blå og fire røde kuler i en eske. Jeg velger tre tilfeldige kuler. Hva er sannsynligheten for at jeg trekker :

1) .... tre blå kuler?

2) .... tre røde kuler?

Oppgave 6

Vi har 5 sjokoladebiter og 3 karameller i en pose. Du får trekke en uten å se i posen, og du like sjokolade best.

1) Hva er sannsynligheten for at du får den du liker best?

2) Du får trekke to biter, hva er sannsynligheten for å få 2 karameller?

3) Hva er sannsynligheten for å få minst en du liker?

Krysstabell og venndiagram

	A	$\bar{A}$	SUM
B	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	$P(B)$
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{B})$
SUM	$P(A)$	$P(\bar{A})$	$P(A \cup B)$

Oppgave 7

Det er like mange elever i klasse 2A og 2B på Rotebakken skole. I A-klassen har halvparten av elevene fransk, i B-klassen har alle valgt fransk.

Fyll ut krysstabellen.

			SUM
SUM			

Vi trekker ut en tilfeldig elev. Hva er sannsynligheten for at denne eleven ikke har fransk?
..... er fra 2B og har fransk?

Oppgave 8

I nabolaget er det totalt 32 familier. 12 av familiene har hund og 14 familier har katt. 4 av familiene har både hund og katt.

Fyll ut krysstabellen.

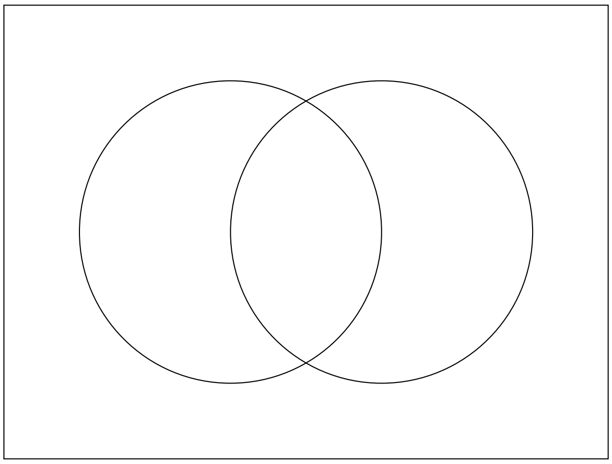
			SUM
SUM			

Oppgave 9

Du har 21 sorte plagg. Av disse er 7 bukser, og du har 10 bukser totalt. 2 plagg er ikke bukser og ikke sorte.

Fyll ut både krysstabellen og venndiagrammet.

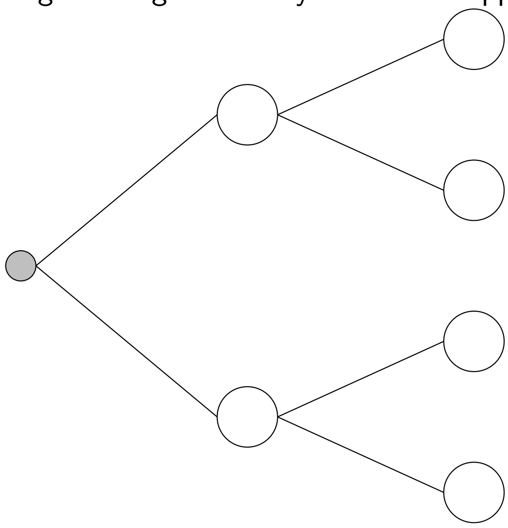
			SUM
SUM			



Valgtre

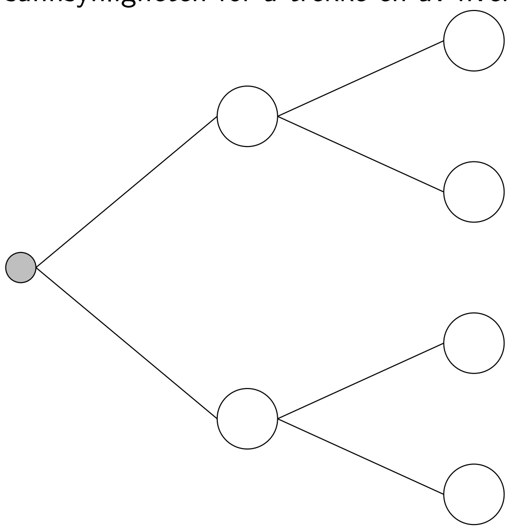
Oppgave 10

Jeg kaster 2 terninger.
Hva er sannsynligheten for å kaste to 4'ere?
Tegn et valgtre for å systematisere opplysningene.



Oppgave 11

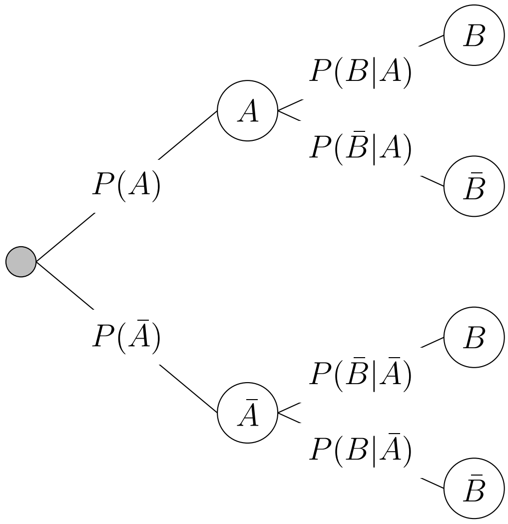
Jeg har en pose med 4 røde og 6 gule kuler. Jeg trekker to tilfeldige kuler, hva er sannsynligheten for å trekke en av hver farge?



Bayes' setning

Bayes' setning

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

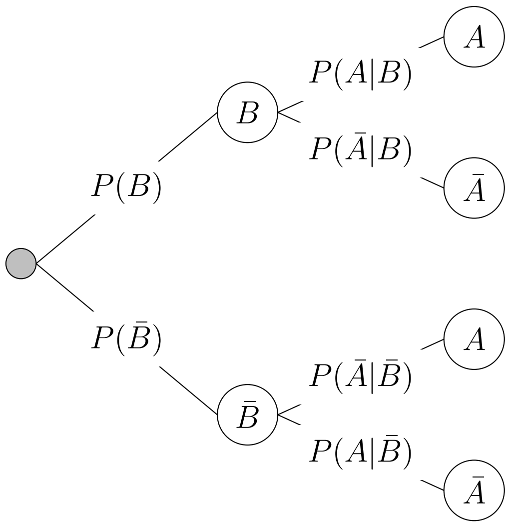


$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})$



$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) \cdot P(\bar{A}|B)$

$P(\bar{B} \cap A) = P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$

$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B \cap A) \\ P(A) \cdot P(B|A) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ P(B|A) &= \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \end{aligned}$$

Oppgave 12

En bedrift produserer mobiler. Avdelign A står for 70% av produksjonen, resten produseres i avdelign B. 5% av produktene fra avdelign A har feil og 10% av produktene fra avdeling B har feil.
Hva er sannsynligheten for

1) ... at en mobil har feil?

2) ...ikke har feil?

3) ...har feil dersom den kommer fra avdeling A?

4) ... er fra avd. B dersom den har feil?

Oppgave 13

I en eske ligger det tre hvite og ni røde julekuler. Én av de hvite kulene er ødelagt og tre av de røde kulene er ødelagt. Du trekker en tilfeldig kule, hva er sannsyligheten for at kula er rød og ødelagt?

Du trekker 2 kuler, hva er sannsynligheten for at det er to ødelagte kuler?
..... to røde kuler som er ødelagt?

Oppgave 14

Jeg kaster to terninger. Hva er sannsynligheten for å få 2 like?
.... sum høyere enn 8?
... ingen like?

Oppgave 15

Jeg har 10 sukkertøy i en pose, 3 røde, 2 gule og 5 grønne. Du får ikke se i posen, men du får ta to sukkertøy.
Hva er sannsynligeten for at du trekker to røde?
...... ingen røde?
.... et grønt og ett rødt?

Oppgave 16

Det er 11 jenter og 14 gutter i klassen. Det blir trukket ut en tilfeldig elev som skal være med på elevrådsmøte.

1) Hva er sannsynligheten for at det blir en jente?

Det skal trekkes to elever til en festkomite.

1) Hvor mange mulige kombinasjoner av gutt/jente har vi?

2) Hva er sannsynligheten for at det blir to gutter?

Oppgave 17

I en klasse er det 16 jenter og 14 gutter. Klassen skal stille et guttelag og ett jentelag til en volleyballturnering. Begge lagene skal ha seks spillere. Hvor mange ulike kombinasjoner finnes det av

1) ...jentelag?

2) ... guttelag?

3) ... blandet lag?

Oppgave 18

I en vennegjeng er det 8 som jobber, 7 som studerer og 3 som både jobber og studerer.

1) Systematisere opplysningene i et venndiagram.

2) Systematisere opplysningene i en krysstabell.

3) Hvor mange er de totalt i vennegjengen?

Oppgave 19

En klasse består av 35 elever. 15 har engelsk, 20 har R1 og 5 har både engelsk og R1.

1) Systematiser opplysningene i krysstabell og venndiagram.

2) Hvor mange elever har hverken engelsk eller R1?

3) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev har engelsk?

4) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev har engelsk og R1?

5) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev har engelsk eller R1?

6) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev som har engelsk også har R1?

7) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev hverken har engelsk eller R1?

Binomisk sannsynlighet

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Oppgave 20

Jeg skal plante tulipaner i hagen og kjøper 20 tulipanløk. På pakken står det 80% spireevne.

1) Hva er sannsynligheten for at jeg får akkurat 15 tulipaner?

2) Hva er sannsynligheten for minst 15 tulipaner?

Oppgave 21

I 2017 stemte 22% på Høyre.

1) Dersom vi trekker en tilfeldig person, hva er da sannsynligheten for at det er en Høyrevelger?

2) Vi trekker 10 personer, hva er da sannsynligheten for at det er akkurat 3 Høyrevelgere?

3) Hva er sannsynligheten at minst 3 av dem er Høyrevelgere?

Hypergeometrisk sannsynlighet

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Oppgave 22

Skolen har lotteri, og det er tre premier. En hovedgevinst og to mindre gevinster. Totalt blir det solgt 120 lodd, og jeg kjøper 5 lodd.

1) Hva er sannsynligheten for at jeg vinner en premie?

2) Hva er sannsynligheten for at jeg vinner hovedgevinsten?

Oppgave 23

Jeg har en eske med 20 lyspærer. Det viser seg at 6 av dem er defekte.

1) Hva er sannsynligheten for å trekke en defekt lyspære?

2) Jeg trekker 5 tilfeldige lyspærer. Hva er sannsynligheten for at 3 av dem er defekte?

3) Hva er sannsynligheten for at minst 2 av dem er defekte?

Oppgave 24

Vi trekker 5 kort fra en kortstokk. Hva er sannsynligheten for å trekke

1) 5 røde kort?

2) 5 spar?

3) 3 billedkort?

4) minst 3 billedkort?

5) 2 spar, 1 ruter og 2 kløver?

6) minst en hjerter?

Hypergeometrisk eller Binomisk

Oppgave 25

På en skole er det 30 jenter og 20 gutter. Vi velger 8 tilfeldige elever.

Hva er sannsynligheten for at vi velger 5 jenter og 3 gutter?

1) Regnet med hypergeometrisk sannsynlighet.

2) Regnet med binomisk sannsynlighet.

Oppgave 26

På en skole er det 300 jenter og 200 gutter. Vi velger 8 tilfeldige elever.
Hva er sannsynligheten for at vi velger 5 jenter og 3 gutter?

1) Regnet med hypergeometrisk sannsynlighet.

2) Regnet med binomisk sannsynlighet.

Oppgave 27

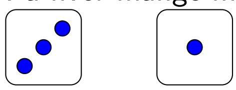
På en skole er det 3000 jenter og 2000 gutter. Vi velger 8 tilfeldige elever.
Hva er sannsynligheten for at vi velger 5 jenter og 3 gutter?

1) Regnet med hypergeometrisk sannsynlighet.

2) Regnet med binomisk sannsynlighet.

Kombinatorikk

På hvor mange måter......?



Hvis jeg kaster to terninger, på hvor mange måter kan jeg da få en 6'er?
Vi har en bolle med 3 kuler, en rød en blå og en gul.

1. På hvor mange måter kan vi trekke en kule ut av bollen?
2. På hvor mange måter kan vi trekke to kuler ut av bollen?
3. På hvor mange måter kan vi trekke tre kuler ut av bollen?

En kule kan trekkes på 3 måter : R,B,G= 3
2 kuler kan trekkes på

1. ikke tilbakelegging - ordnet utvalg : {RG,RB,BG,BR,GB,GR} = 6
2. Ikke tilbakelegging - uordnet utvalg : RG,RB,BG = 3
3. Med tilbakelegging - ordnet utvalg : RR,RG,RB,BB,BR,BG,GG,GR,GB = 9
4. Med tilbakelegging - uordnet utvalg : RR,RG,RB,GG,BB,BG = 6

3 kuler kan trekkes på

1. ikke tilbakelegging - ordnet utvalg : {RBG}=1
2. Ikke tilbakelegging - uordnet utvalg :{RBG}=1
3. Med tilbakelegging - ordnet utvalg : {RRR,RGB,RBG,RRB,RRG,......}
4. Med tilbakelegging - uordnet utvalg : {RRR,RRB,RRG,RBB,RGG,BGG,BBG,BBB,GGG}

For å slippe å ramse opp alle mulige kombinasjoner når det blir større antall har vi formler.
n= antall kuler totalt r = antall kuler vi trekker

1. ikke tilbakelegging - ordnet utvalg : $\frac{n!}{(n-r)!}$
2. Ikke tilbakelegging - uordnet utvalg :$\frac{n!}{(n-r)!r!}$
3. Med tilbakelegging - ordnet utvalg :n^r
4. Med tilbakelegging - uordnet utvalg : (ikke pensum)

Vi ser på eksemplet med å trekke 2 kuler ut fra 3 :

1. ikke tilbakelegging - ordnet utvalg : $\frac{n!}{(n-r)!} = 6$
2. Ikke tilbakelegging - uordnet utvalg : $\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 6/2 = 3$
3. Med tilbakelegging - ordnet utvalg : $n^r = 3^2 = 3^2 = 9$
4. Med tilbakelegging - uordnet utvalg : (ikke pensum)