Arbeidshefte

Vektorer - R2

Sum og differanse av vektorer

$$\vec{a}+\vec{b}=[x_a,y_a,z_a]+[x_b,y_b,z_b]=[x_a+x_b,y_a+y_b,z_a+z_b]$$

Vektor mellom 2 punkt : $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A]$

Lengden av en vektor : $\vec{a}=[x,y,z]\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Produkt av skalar og vektor $k\cdot\vec{a}=k\cdot[x,y,z]=[k\cdot x,k\cdot y,k\cdot z]$

Parallellevektorer

$$\vec{a}||\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\cdot\vec{b}$$

$$k\cdot\vec{a}=k\cdot[x_a,y_a,z_a]=[kx_a,ky_a,kz_a]$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

Ortogonale vektorer : $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\x_a&y_a&z_a\\x_b&y_b&z_b\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}y_a&z_a\\y_b&z_b\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}x_a&z_a\\x_b&z_b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_a&y_a\\x_b&y_b\end{bmatrix}\right]$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\vec{c}\perp\vec{a}\quad\wedge\quad\vec{c}\perp\vec{b}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)$$

Areal av parallelleogram : A=$|\vec{a}\times\vec{b}|$
Areal av trekant : A=$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$
Volum av parallellepiped : V=$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$
Volum av firkantet pyramide : V=$\frac{1}{3}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$
Volum av trekantet pyramide (tetraeder) : V=$\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

Oppgave 1

Uttrykk disse vektorene med enhetsvektorer.

1) $[2, 3, 1] =$

2) $[2, -2, 3] =$

3) $[-1, 3, -2] =$

4) $[1, -2, -1] =$

5) $[4, -5, 1] =$

Oppgave 2

Uttrykk disse vektorene på koordinatform.

1) $2\vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z} =$

2) $3\vec{e_x} + 2\vec{e_y} + 5\vec{e_z} =$

3) $\vec{e_x} - 2\vec{e_y} - 2\vec{e_z} =$

4) $-\vec{e_x} - \vec{e_y} - \vec{e_z} =$

5) $5\vec{e_x} + 7\vec{e_y} - \vec{e_z} =$

Sum og differanse

$\vec{a} + \vec{b} = [x_a, y_a, z_a] + [x_b, y_b, z_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b]$

$\vec{a} + \vec{b} = [2, 1, 0] + [-1, 2, -3] = [2 - 1, 1 + 2, 0 - 3] = [1, 3, -3]$

$\vec{a} - \vec{b} = [2, 1, 0] - [-1, 2, -3] = [2 - (-1), 1 - 2, 0 - (-3)] = [3, -1, 3]$

Oppgave 3

$\vec{a} = [2, 1, 3]$, $\vec{b} = [-1, 3, -2]$, $\vec{c} = [1, 2, -1]$

1) $\vec{a} + \vec{b} =$

2) $\vec{a} - \vec{c} =$

3) $\vec{b} + \vec{a} =$

4) $\vec{c} - \vec{a} =$

5) $\vec{b} + \vec{c} =$

6) $\vec{c} - \vec{b} =$

Vektor mellom 2 punkter

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$$

Oppgave 4

Finn vektoren mellom punktene.

1) $(1, 3, 2)$ og $(2, 3, -1)$

2) $(3, -1, 2)$ og $(-1, -1, 2)$

3) $(-1, 0, 5)$ og $(0, 4, -1)$

4) $(2, 2, 2)$ og $(-1, 1, -1)$

5) $(0, 4, -1)$ og $(1, 1, 2)$

6) $(1, 0, -0)$ og $(0, 0, 0)$

Lengden av en vektor

$$\vec{a} = [x, y, z] \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Oppgave 5

1) $|[1, 2, -1]| =$

2) $|[-2, 0, 1]| =$

3) $|[3, 1, 0]| =$

4) $|[1, -1, 1]| =$

5) $|[2, 2, -2]| =$

6) $|[-9, 18, 27]| =$

7) $|[5, 4, 2]| =$

8) $|[8, 2, 4]| =$

9) $|[a, 2a, -a]| =$

10) $|[4a, 0, 3a]| =$

Produkt av skalar og vektor

$k \cdot \vec{a} = k \cdot [x, y] = [k \cdot x, k \cdot y]$

Oppgave 6

1) $2 \cdot [2, 1, 4] =$

2) $4 \cdot [1, -1, 2] =$

3) $-3 \cdot [3, 2, 1] =$

4) $5 \cdot [1, 2, -1] =$

5) $(-1) \cdot [2, 3, 1] =$

Parallelle vektorer

$\vec{a}||\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$

$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot [2, 1] = [2 \cdot 2, 2 \cdot 1] = [4, 2]$

Oppgave 7

Undersøk om vektorene er parallelle.

1) $\vec{u} = [1, 2, -1]$ og $\vec{v} = [2, 4, -2]$

2) $\vec{u} = [4, 3, -1]$ og $\vec{v} = [8, 4, -2]$

3) $\vec{u} = [1, 1, -1]$ og $\vec{v} = [-2, -2, 2]$

4) $\vec{u} = [1, -2, -1]$ og $\vec{v} = [2, 4, -1]$

5) $\vec{u} = [-2, 1, -2]$ og $\vec{v} = [4, -2, 4]$

Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Oppgave 8

Finn skalarproduktet

1) $[2, 1, -4] \cdot [-1, 3, -2] =$

2) $[-1, 1, 3] \cdot [5, -1, -1] =$

3) $[2, 0, 4] \cdot [2, 2, 0] =$

4) $[2, 5, 1] \cdot [2, 3, -4] =$

5) $[1, 0, 1] \cdot [0, 5, 1] =$

Ortogonale vektorer

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Oppgave 9

Sjekk om vektorene står vinkelrett på hverandre.

1) $[0, 2, 0]$ og $[1, 0, 1]$

2) $[2, 3, -1]$ og $[1, 1, 6]$

3) $[1, 2, -1]$ og $[-3, 1, -1]$

4) $[2, 1, 0]$ og $[-1, -2, 3]$

5) $[2, 5, 1]$ og $[4, -2, 2]$

Regning med vektorer

Oppgave 10

Vi har gitt vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
$|\vec{a}| = 7$ og $|\vec{b}| = 4$ og vinkelen mellom dem er 60^o

1) Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

2) Regn ut $\vec{b} \cdot \vec{a} =$

3) Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{a} =$

4) Regn ut $\vec{b} \cdot \vec{b} =$

5) Regn ut $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) =$

6) Regn ut $2\vec{a} \cdot 3\vec{b} =$

7) Regn ut $(\vec{a} + \vec{b})^2 =$

8) Regn ut $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) =$

9) Regn ut $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b}) =$

10) Regn ut $2\vec{a}(\vec{a} - 3\vec{b}) =$

Matriser -Determinant

Determinanten til en 2×2-matriser

$$\begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Eksempel
$\vec{a} = [2, 1]$, $\vec{b} = [-1, 4]$
Determinant : det$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - (-1) = 9$

Oppgave 11

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

4) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$

5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

6) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} =$

7) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} =$

8) $\begin{bmatrix} a & 2a \\ -a & a \end{bmatrix} =$

Determinanten til en 3×3-matriser

$$\begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_a \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix} = x_a \cdot \begin{bmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{bmatrix} - y_a \cdot \begin{bmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{bmatrix} + z_a \cdot \begin{bmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{bmatrix}$$

Oppgave 12

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

4) $\begin{bmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & -a & a \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix} =$

Vektorprodukt

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{bmatrix} \\
&= \vec{e_x} \begin{bmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{bmatrix} - \vec{e_y} \begin{bmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{bmatrix} + \vec{e_z} \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}
$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \ \wedge \ \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

Oppgave 13

1) $[2, 5, 1] \times [1, 2, 3]$

2) $[1, 2, 3] \times [2, 5, 1]$

3) $[3, 2, 3] \times [4, 2, 6]$

4) $[-4, 0, -2] \times [3, -1, 2]$

5) $[3, -1, 0] \times [-4, 5, 0]$

6) $[0, 2, 1] \times [0, -3, 4]$

7) $[1, 0, 0] \times [0, 1, 0]$

8) $[0, 0, 1] \times [0, 1, 0]$

Areal og volum

Areal av parallelleogram : A=$|\vec{a} \times \vec{b}|$

Areal av trekant : A=$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Volum av parallellepiped : V=$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av firkantet pyramide : V=$\frac{1}{3}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av trekantet pyramide (tetraeder) : V=$\frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Oppgave 14

Vi har 3 vektorer : $\vec{a} = [2, -2, 1]$, $\vec{b} = [3, -3, 1]$ og $\vec{c} = [2, -3, 2]$

1) Finn arealet av parallellogrammet som spennes ut av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

2) Finn arealet av trekanten som spennes ut av $\vec{b}$ og $\vec{c}$

3) Finn arealet av trekanten som spennes ut av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

4) Finn Volumet av parallellipipedet som spennes ut av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$

5) Finn Volumet av den firkantede pyramiden som spennes ut av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$

6) Finn Volumet av tetraederet som spennes ut av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$

7) Finn høyden av pyramiden i oppg.5) når grunnflaten utspennes av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

8) Finn høyden av tetraederet i oppg.6) når grunnflaten utspennes av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Oppgave 15

Finn t slik at vektorene er parallelle.

1) $[1, 2, 3]$ og $[3, 2(1-t), 11+t]$

2) $[t, 2, -1]$ og $[2, t, 1]$

3) $[0, t, 2]$ og $[0, -1, -2]$

4) $[2, -3, t]$ og $[-4, 6, -2]$

5) $[2t, 4, 2t]$ og $[6, t+1, 3+t]$

Oppgave 16

Finn t og s slik at vektorene er parallelle. (Bruk Geogebra)

1) $[-1, 2s, 4]$ og $[3, 18, 4t + 4]$

2) $[s, 2, 3]$ og $[1, t, s + t]$

3) $[t, 6, s + 1]$ og $[s + 2, 2 + t, 3]$

4) $[6, t + 1, s - 2]$ og $[2(t + 1), 3, 1]$

5) $[2, -t, s - 1]$ og $[t - 1, -3s, 0]$

Dette arbeidshefte :

Løsningsforslag :

11/03/24