Arbeidshefte
Vektorer - R1

Definisjon :
En vektor er et linjestykke med en bestemt lengde og en bestemt retning.
Vektorer er nyttige for å beskrive fart og krefter.

En skalar er en størrelse uten retning.

$$k[x, y] = [k \cdot x, k \cdot y]$$
$$[x_a, y_a] + [x_b, y_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b]$$
$$|\vec{a}| = |[x_a, y_a]| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Skalarprodukt :

$$[x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

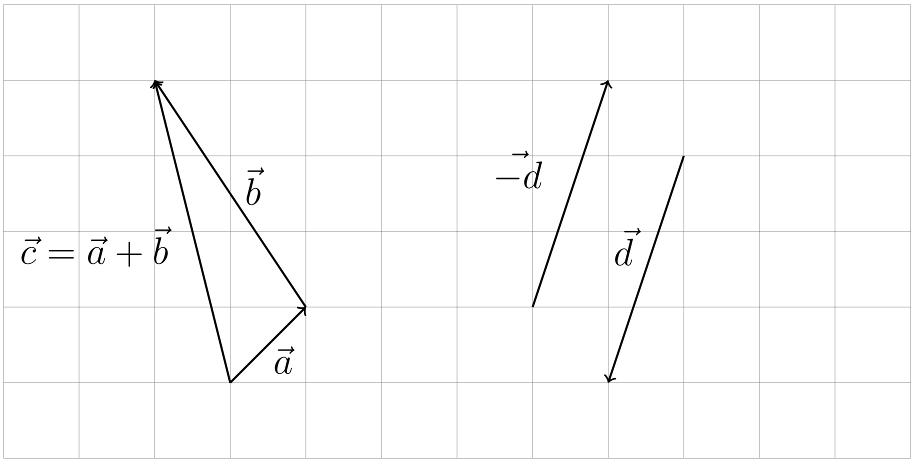
Orthogonale vektorer :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Parallelle vektorer :

$$\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

Vektorer som piler



Når vi legger sammen 2 vektorer legger vi dem etter hverandre (se figur over). Da får vi en ny vektor fra startpunktet til sluttpunktet. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Hvis vi setter minus foran vektoren så snur den retning.

NB! Vektorer er ikke stedbundne - de kan flyttes.

Oppgave 1

Bruk vektorene over og tegn inn:

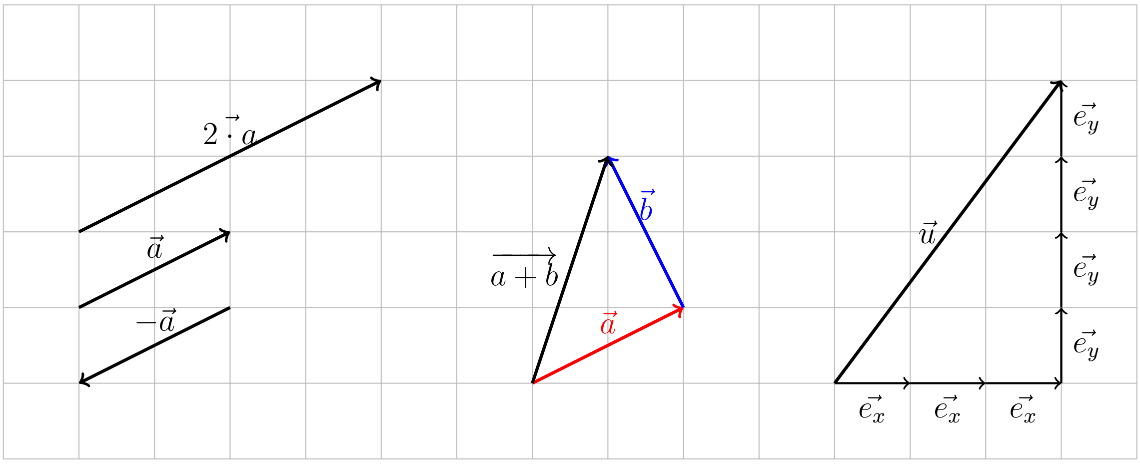
1) $\vec{d} + \vec{a}$

2) $\vec{b} - \vec{a}$

3) $\vec{d} - \vec{b}$

Enhetsvektorer

En vektor har både en retning og en lengde (størrelse)
Enhetsvektoren $\vec{e_x}$ går en enhet i x-retningen
Enhetsvektoren $\vec{e_y}$ går en enhet i y-retningen



Enhetsvektorer

$\vec{u} = 3\vec{e_x} + 4\vec{e_y} = [3, 4]$
$\vec{a} = 2\vec{e_x} + \vec{e_y} = [2, 1]$
$-\vec{a} = -2\vec{e_x} - \vec{e_y} = [-2, -1] = -[2, 1]$
$\vec{b} = -\vec{e_x} + 2\vec{e_y} = [-1, 2]$

Oppgave 2

Uttrykk disse vektorene med enhetsvektorer.

1) $[2, 3] =$

2) $[2, -2] =$

3) $[-1, 3] =$

4) $[1, -2] =$

5) $[4, -5] =$

Oppgave 3

Uttrykk disse vektorene på koordinatform.

1) $2\vec{e_x} - \vec{e_y} =$

2) $3\vec{e_x} + 2\vec{e_y} =$

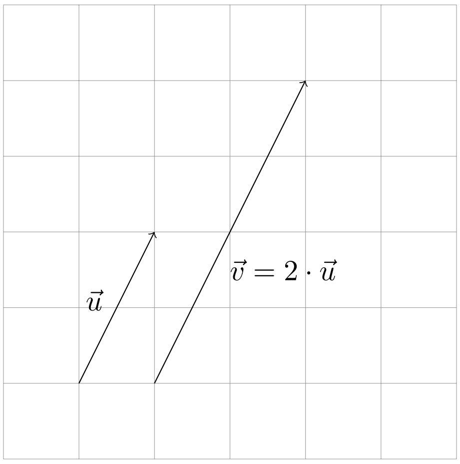
3) $\vec{e_x} - 2\vec{e_y} =$

4) $-\vec{e_x} - \vec{e_y} =$

5) $5\vec{e_x} + 7\vec{e_y} =$

Produkt av vektor og skalar

(Vektor multiplisert med konstant)



$\vec{u} = [2, 1] \Rightarrow \vec{v} = 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot [2, 1] = [4, 2]$

Oppgave 4

Bestem k :

1) $[4, 2] = k \cdot [2, 1]$

2) $[6, 8] = k \cdot [3, 4]$

3) $k \cdot [1, 3] = [3, 9]$

4) $[3, 1] = k \cdot [6, 2]$

Oppgave 5

Bestem x og y slik at :

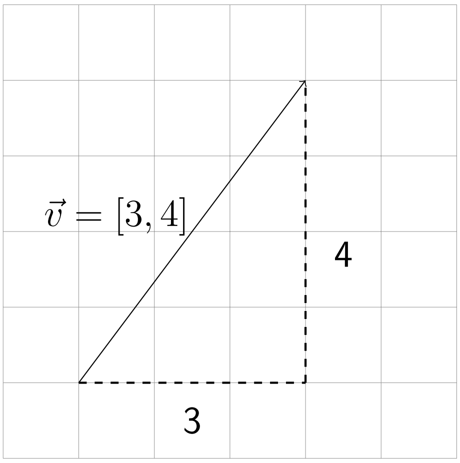
1) $x\vec{a} + y\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

2) $(x + 1)\vec{a} + (y - 1)\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$

3) $\frac{x}{2}\vec{a} - y\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

4) $x^2\vec{a} + \frac{y}{3}\vec{b} = 4\vec{a} - 9\vec{b}$

Vektorer med koordinater



Koordinatene til en vektor forteller $\left[\text{endring i x-retning}\;,\;\text{endring i y-retning}\right]$

Oppgave 6

Finn koordinatene til vektorene i oppgave 1

1) $\vec{a} =$

2) $\vec{b} =$

3) $\vec{c} =$

4) $\vec{d} =$

5) $\vec{-d} =$

Vektorer mellom punkter

En vektor som går fra et punkt A til et punkt B :

$A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$

$\overrightarrow{AB} = [x_b - x_a, y_b - y_a]$

Oppgave 7

Tegn inn vektorene som går mellom punktene, og finn vektorkoordinatene både grafisk og ved regning..

1) $(0,0),(3,2)$

2) $(1,2),(5,-2)$

3) $(1,3),(-2,5)$

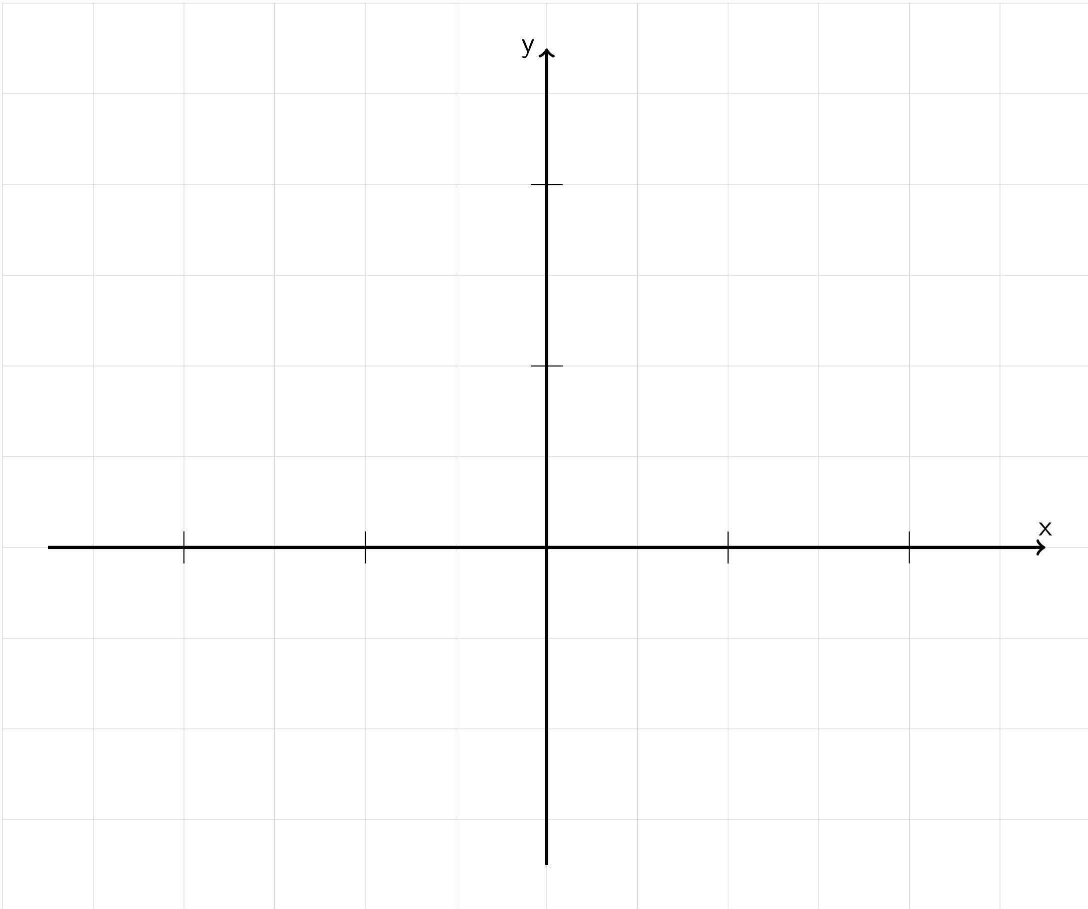
4) $(-4,-3),(-2,3)$

5) $(2,-2),(2,2)$

6) $(5,0),(1,5)$

7) $(-1,-3),(-2,1)$

8) $(-5,3),(-4,0)$


y
x

Sum og differanse av vektorer

$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$
$[a,b]-[c,d]=[a-c,b-d]$

Oppgave 8

1) $[1,2]+[4,2]=$

2) $[4,-1]+[2,6]=$

3) $[-5,-2]+[5,-1]=$

4) $[0,2]+[0,3]=$

5) $[-4,0]-[4,5]=$

6) $[1,1]-[5,-1]=$

7) $[2,-4]-[-4,2]=$

8) $[4,5]-[1,1]=$

Lengden av vektorer

Lengden av en vektor :
$$|\vec{u}| = |[a, b]| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Oppgave 9

Finn lengden av vektorene.

1) $|[2, 3]| =$

2) $|[1, 3]| =$

3) $|[-2, 3]| =$

4) $|[1, -4]| =$

5) $|[2, -1]| =$

6) $|[-3, -2]| =$

7) $|[3, 4]| =$

8) $|[4, 5]| =$

9) $|[1, 1]| =$

10) $|[2, 1]| =$

Skalarprodukt med koordinater

$[x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Oppgave 10

1) $[1, 2] \cdot [4, 2] =$

2) $[4, -1] \cdot [2, 6] =$

3) $[-5, -2] \cdot [5, -1] =$

4) $[0, 2] \cdot [0, 3] =$

5) $[-4, 0] \cdot [4, 5] =$

6) $[1, 1] \cdot [5, -1] =$

7) $[2, -4] \cdot [-4, 2] =$

8) $[4, 5] \cdot [1, 1] =$

Skalarprodukt

$[x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Oppgave 11

Finn $\cos\alpha$ uten kalkulator, og finn vinkelen mellom vektorene med kalkulator (hvis du trenger den :))

1) $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$

2) $\vec{a} = [2, 3]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$

3) $\vec{a} = [0, 3]$ og $\vec{b} = [-3, 0]$

4) $\vec{a} = [1, 1]$ og $\vec{b} = [-1, 1]$

Ortogonale vektorer

To vinkler er ortogonale dersom skalarproduktet blir 0.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$[a, b] \cdot [-b, a] = -ab + ab = 0$

Oppgave 12

Undersøk om vektorene er ortogonale.

1) $[-5, -2] \cdot [5, -2]$

2) $[0, 2] \cdot [3, 0]$

3) $[-4, 0] \cdot [4, 5]$

4) $[1, 5] \cdot [5, -1]$

5) $[2, -4] \cdot [4, 2]$

6) $[4, 5] \cdot [1, 1]$

Parallelle vektorer

To vektorer er paralelle der som det finnes en k slik at $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$

Oppgave 13

Undersøk om vektorene er parallelle

1) $\vec{a} = [2, 1]$ og $\vec{b} = [4, 2]$

2) $\vec{a} = [3, 2]$ og $\vec{b} = [1, -2]$

3) $\vec{a} = [1, -4]$ og $\vec{b} = [-2, 8]$

4) $\vec{a} = [3, -4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$

Oppgave 14

Bestem x slik at vektorene er parallelle

1) $\vec{a} = [1, x]$ og $\vec{b} = [2, -1]$

2) $\vec{a} = [4x, 4]$ og $\vec{b} = [16, x]$

3) $\vec{a} = [-2, -3]$ og $\vec{b} = [4, x]$

4) $\vec{a} = [x, 4]$ og $\vec{b} = [3, 2]$

5) $\vec{a} = [x, 1]$ og $\vec{b} = [4, 2]$

Oppgave 15

Vi har gitt punktene $A(3, 1)$, $B(0, 2)$ og $C(2, 5)$

1) Finn $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

2) Finn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) Finn $|\overrightarrow{AB}|$ og $|\overrightarrow{AC}|$

Oppgave 16

Vi har gitt punktene $A(2, 3)$ og $B(5, -2)$.

1) Finn koordinatene til et punkt C på y-aksen slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

2) Finn koordinatene til et punkt D på x-aksen slik at $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC}$

Eksamensoppgaver

Oppgave 17 - ExR1V13 del1

Vektorene $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-6, 4]$ og $\vec{c} = [3, 11]$ er gitt.

a) Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Bestem ved regning to tall k og t slik at $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Oppgave 18 - ExR1H13 del1

Vektorene $\vec{a} = [1, 3]$, $\vec{b} = [3, 2]$ og $\vec{c} = [-1, 2]$ er gitt.

a) Regn ut og tegn vektorene $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c}$ i et koordinatsystem.

b) Avgjør ved regning om $\vec{u} \perp \vec{v}$

Oppgave 19 - (ExR1V14 del1, oppg.3, 4 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [-2, 1]$, $\vec{b} = [3, 6]$ og $\vec{c} = [k-1, 4]$ er gitt.

a) Bestem $-2\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved regning.

b) Bestem k slik at $\vec{a}||\vec{c}$

c) Bestem k slik at $|\vec{c}| = |2\vec{a}|$

Oppgave 20 - ExR1H14 del1

a) Forklar at $\vec{v} = [1, a]$ er en retningsvektor til linjen $y = ax + b$

b) To linjer er gitt ved likningene $y_1 = a_1 \cdot x + b_1$ og $y_2 = a_2 \cdot x + b_2$. Bruk skalarprodukt til å vise at dersom linjene står vinkelrett på hverandre er $a_1 \cdot a_2 = -1$

Oppgave 21 - Eksempeloppgave R1 2014 del1

Punktene $A(1,0)$, $B(3,4)$ og $C(2,t)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

b) Bestem t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

c) Bestem t slik at $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{AC}$

Oppgave 22 - ExR1V15 del1

Vektoren $\vec{v} = [3,4]$

a) Bestem en vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsatt rettet.

b) Bestem en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

FASIT

Oppgave 1

Oppgave 2

1) $2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}$
2) $2\vec{e_x} - 2\vec{e_y}$
3) $-\vec{e_x} + 3\vec{e_y}$
4) $\vec{e_x} - 2\vec{e_y}$
5) $4\vec{e_x} - 5\vec{e_y}$

Oppgave 3

1) $[2, -1]$
2) $[3, 2]$
3) $[1, -2]$
4) $[-1, -1]$
5) $[5, 7]$

Oppgave 4

1) $k = 2$
2) $k = 2$
3) $k = 3$
4) $k = \frac{1}{2}$

Oppgave 5

1) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}$
2) $x = 4, y = -2$
3) $x = 3, y = -2$
4) $x = \pm 2, y = -27$

Oppgave 6

1) $\vec{a} = [1, 1]$
2) $\vec{b} = [-2, 3]$
3) $\vec{c} = [-1, 4]$
4) $\vec{d} = [-1, -3]$
5) $\vec{d} = [1, 3]$

Oppgave 7

Oppgave 8

1) $[5, 4]$
2) $[6, 5]$
3) $[0, -3]$
4) $[0, 5]$
5) $[-8, -5]$
6) $[-4, 2]$
7) $[6, -6]$
8) $[3, 4]$

Oppgave 9

1) $\sqrt{13}$
2) $\sqrt{10}$
3) $\sqrt{13}$
4) $\sqrt{17}$
5) $\sqrt{5}$
6) $\sqrt{13}$
7) 5
8) $\sqrt{41}$
9) $\sqrt{2}$
10) $\sqrt{5}$

Oppgave 10

1) $4+4=8$
2) $8-6=2$
3) $-25+2=-23$
4) $0+6=6$
5) $-16+0=-16$
6) $5-1=4$
7) $-8-8=-16$
8) $4+5=9$

Oppgave 11

1) $\cos v = \frac{1}{2}, v = 60^o$
2) $\cos v = 0, v = 90^o$
3) $v = 90^o$
4) $v = 90^o$

Oppgave 12

1) ikke ortogonale
2) ortogonale
3) ikke ortogonale
4) ortogonale
5) ortogonale
6) ikke ortogonale

Oppgave 13

1) parallelle ,$k = 2$
2) ikke parallelle
3) parallelle ,$k = -2$
4) ikke parallelle

Oppgave 14

1) $x = -\frac{1}{2}$
2) $x = 4$
3) $x = 6$
4) $x = 6$
5) $x = 2$

Oppgave 15

1) $\overrightarrow{AB} = [-3, 1]$ og $\overrightarrow{AC} = [-1, 4]$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$
3) $|\overrightarrow{AB}| = |[-3, 1]| = \sqrt{10}$
   $|\overrightarrow{AC}| = |[-1, 4]| = \sqrt{17}$

Oppgave 16

1) $C(0, \frac{9}{5})$
2) $D(\frac{27}{25}, 0)$

Oppgave 17

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
b) $k = 3, t = \frac{1}{2}$

Oppgave 18

a) $\vec{u} = [7, 7], \vec{v} = [5, -2]$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$

Oppgave 19

a) $-2\vec{a} + \vec{b} = [7, 4], \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

b) $k = -7$

c) $k = 3 \vee k = -1$

Oppgave 20

a) linjen $y = ax + b$ har stigningstall a , som betyr at når vi går en enhet bort parallelt men x-aksen så stiger (eller synker) linjen med a, dette gir en retningsvektor $[1, a]$

b) $\vec{r_1} = [1, a_1], \vec{r_2} = [1, a_2]$
$[1, a_1] \cdot [1, a_2] = 1 + a_1 \cdot a_2 = 0$
$a_1 \cdot a_2 = -1$

Oppgave 21

a) $\overrightarrow{AB} = [2, 4]$ og $\overrightarrow{AC} = [1, t]$

b) $t = -\frac{1}{2}$

c) $t = 2$

Oppgave 22

a) $\vec{u} = -\vec{v} = [-3, -4]$
b) $\vec{w} = [-4, 3]$