

# Arbeidshefte

## Vektorer - R2

Sum og differanse av vektorer

$$\vec{a} + \vec{b} = [x_a, y_a, z_a] + [x_b, y_b, z_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b]$$

Vektor mellom 2 punkt :  $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$

Lengden av en vektor :  $\vec{a} = [x, y, z] \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Produkt av skalar og vektor  $k \cdot \vec{a} = k \cdot [x, y, z] = [k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z]$

Parallellevektorer

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot [x_a, y_a, z_a] = [kx_a, ky_a, kz_a]$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Ortogonale vektorer :  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \quad \wedge \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

Areal av parallelogram :  $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Areal av trekant :  $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

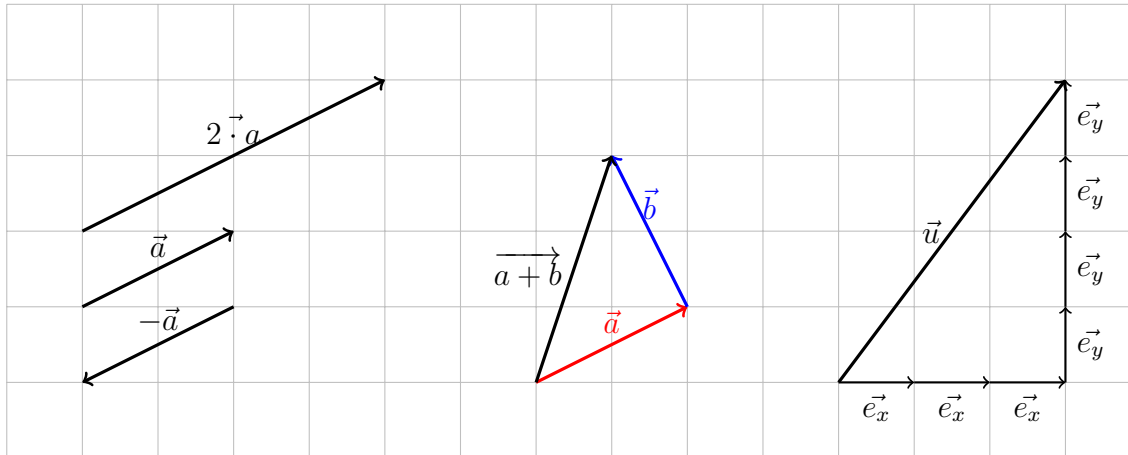
Volum av parallelepiped :  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av firkantet pyramide :  $V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av trekantet pyramide (tetraeder) :  $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

## Definisjon

En vektor har både en retning og en lengde (størrelse)



### Enhetsvektorer

$$\vec{u} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y = [3, 4]$$

$$\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y = [2, 1]$$

$$-\vec{a} = -2\vec{e}_x - \vec{e}_y = [-2, -1] = -[2, 1]$$

$$\vec{b} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y = [-1, 2]$$

## Oppgave 1

Uttrykk disse vektorene med enhetsvektorer.

- 1)  $[2, 3, 1] =$
- 2)  $[2, -2, 3] =$
- 3)  $[-1, 3, -2] =$
- 4)  $[1, -2, -1] =$
- 5)  $[4, -5, 1] =$

## Oppgave 2

Uttrykk disse vektorene på koordinatform.

- 1)  $2\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z =$
- 2)  $3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z =$
- 3)  $\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z =$
- 4)  $-\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z =$
- 5)  $5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y - \vec{e}_z =$

## Sum og differanse

$$\vec{a} + \vec{b} = [x_a, y_a, z_a] + [x_b, y_b, z_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b]$$

$$\vec{a} + \vec{b} = [2, 1, 0] + [-1, 2, -3] = [2 - 1, 1 + 2, 0 - 3] = [1, 3, -3]$$

$$\vec{a} - \vec{b} = [2, 1, 0] - [-1, 2, -3] = [2 - (-1), 1 - 2, 0 - (-3)] = [3, 1, 3]$$

### Oppgave 3

$$\vec{a} = [2, 1, 3], \vec{b} = [-1, 3, -2], \vec{c} = [1, 2, -1]$$

1)  $\vec{a} + \vec{b} =$

2)  $\vec{a} - \vec{c} =$

3)  $\vec{b} + \vec{a} =$

4)  $\vec{c} - \vec{a} =$

5)  $\vec{b} + \vec{c} =$

6)  $\vec{c} - \vec{b} =$

## Vektor mellom 2 punkter

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$$

### Oppgave 4

Finn vektoren mellom punktene.

1)  $(1, 3, 2)$  og  $(2, 3, -1)$

2)  $(3, -1, 2)$  og  $(-1, -1, 2)$

3)  $(-1, 0, 5)$  og  $(0, 4, -1)$

4)  $(2, 2, 2)$  og  $(-1, 1, -1)$

5)  $(0, 4, -1)$  og  $(1, 1, 2)$

6)  $(1, 0, -0)$  og  $(0, 0, 0)$

## Lengden av en vektor

$$\vec{a} = [x, y, z] \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Oppgave 5

1)  $|[1, 2, -1]| =$

2)  $|[-2, 0, 1]| =$

3)  $|[3, 1, 0]| =$

4)  $|[1, -1, 1]| =$

5)  $|[2, 2, -2]| =$

6)  $|[-9, 18, 27]| =$

7)  $|[5, 4, 2]| =$

8)  $|[8, 2, 4]| =$

9)  $|[a, 2a, -a]| =$

10)  $|[4a, 0, 3a]| =$

## Produkt av skalar og vektor

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot [x, y] = [k \cdot x, k \cdot y]$$

### Oppgave 6

1)  $2 \cdot [2, 1, 4] =$

2)  $4 \cdot [1, -1, 2] =$

3)  $-3 \cdot [3, 2, 1] =$

4)  $5 \cdot [1, 2, -1] =$

5)  $(-1) \cdot [2, 3, 1] =$

## Parallele vektorer

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot [2, 1] = [2 \cdot 2, 2 \cdot 1] = [4, 2]$$

### Oppgave 7

Undersøk om vektorene er parallelle.

- 1)  $\vec{u} = [1, 2, -1]$  og  $\vec{v} = [2, 4, -2]$
  
- 2)  $\vec{u} = [4, 3, -1]$  og  $\vec{v} = [8, 4, -2]$
  
- 3)  $\vec{u} = [1, 1, -1]$  og  $\vec{v} = [-2, -2, 2]$
  
- 4)  $\vec{u} = [1, -2, -1]$  og  $\vec{v} = [2, 4, -1]$
  
- 5)  $\vec{u} = [-2, 1, -2]$  og  $\vec{v} = [4, -2, 4]$

## Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

### Oppgave 8

Finn skalarproduktet

1)  $[2, 1, -4] \cdot [-1, 3, -2] =$

2)  $[-1, 1, 3] \cdot [5, -1, -1] =$

3)  $[2, 0, 4] \cdot [2, 2, 0] =$

4)  $[2, 5, 1] \cdot [2, 3, -4] =$

5)  $[1, 0, 1] \cdot [0, 5, 1] =$



## Ortogonale vektorer

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

### Oppgave 9

Sjekk om vektorene står vinkelrett på hverandre.

- 1)  $[0, 2, 0]$  og  $[1, 0, 1]$
  
- 2)  $[2, 3, -1]$  og  $[1, 1, 6]$
  
- 3)  $[1, 2, -1]$  og  $[-3, 1, -1]$
  
- 4)  $[2, 1, 0]$  og  $[-1, -2, 3]$
  
- 5)  $[2, 5, 1]$  og  $[4, -2, 2]$

## Regning med vektorer

### Oppgave 10

Vi har gitt vektorene  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .

$|\vec{a}| = 7$  og  $|\vec{b}| = 4$  og vinkelen mellom dem er  $60^\circ$

1) Regn ut  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

2) Regn ut  $\vec{b} \cdot \vec{a} =$

3) Regn ut  $\vec{a} \cdot \vec{a} =$

4) Regn ut  $\vec{b} \cdot \vec{b} =$

5) Regn ut  $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) =$

6) Regn ut  $2\vec{a} \cdot 3\vec{b} =$

7) Regn ut  $(\vec{a} + \vec{b})^2 =$

8) Regn ut  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) =$

9) Regn ut  $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b}) =$

10) Regn ut  $2\vec{a}(\vec{a} - 3\vec{b}) =$

**Matriser** $2 \times 2$ -matriser

$$\begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Eksempel

$$\vec{a} = [2, 1], \vec{b} = [-1, 4]$$

$$\text{Determinant : } \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - (-1) = 9$$

**Oppgave 11**

1)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

2)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$

3)  $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

4)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$

5)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

6)  $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} =$

7)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} =$

8)  $\begin{bmatrix} a & 2a \\ -a & a \end{bmatrix} =$

3×3-matriser

$$\begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix} = x_a \cdot \begin{bmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{bmatrix} - y_a \cdot \begin{bmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{bmatrix} + z_a \cdot \begin{bmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{bmatrix}$$

### Oppgave 12

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$4) \begin{bmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & -a & a \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix} =$$

**Vektorprodukt**

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_x \begin{bmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{bmatrix} - \vec{e}_y \begin{bmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{bmatrix} + \vec{e}_z \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \\ &= \left[ \begin{bmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c} \\ \vec{c} &\perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

**Oppgave 13**

- 1)  $[2, 5, 1] \times [1, 2, 3]$
- 2)  $[1, 2, 3] \times [2, 5, 1]$
- 3)  $[3, 2, 3] \times [4, 2, 6]$
- 4)  $[-4, 0, -2] \times [3, -1, 2]$
- 5)  $[3, -1, 0] \times [-4, 5, 0]$
- 6)  $[0, 2, 1] \times [0, -3, 4]$
- 7)  $[1, 0, 0] \times [0, 1, 0]$
- 8)  $[0, 0, 1] \times [0, 1, 0]$

## Areal og volum

Areal av parallelogram :  $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Areal av trekant :  $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Volum av parallelepiped :  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av firkantet pyramide :  $V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av trekantet pyramide (tetraeder) :  $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

### Oppgave 14

Vi har 3 vektorer :  $\vec{a} = [2, -2, 1]$  ,  $\vec{b} = [3, -3, 1]$  og  $\vec{c} = [2, -3, 2]$

- 1) Finn arealet av parallelogrammet som spennes ut av  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$
- 2) Finn arealet av trekanten som spennes ut av  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$
- 3) Finn arealet av trekanten som spennes ut av  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$
- 4) Finn Volumet av parallelepipedet som spennes ut av  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$
- 5) Finn Volumet av den firkantede pyramiden som spennes ut av  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$
- 6) Finn Volumet av tetraederet som spennes ut av  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$
- 7) Finn høyden av pyramiden i oppg.5) når grunnflaten utspennes av  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$
- 8) Finn høyden av tetraederet i oppg.6) når grunnflaten utspennes av  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$

### Oppgave 15

Finn  $t$  slik at vektorene er parallelle.

1)  $[1, 2, 3]$  og  $[3, 2(1 - t), 11 + t]$

2)  $[t, 2, -1]$  og  $[2, t, 1]$

3)  $[0, t, 2]$  og  $[0, -1, -2]$

4)  $[2, -3, t]$  og  $[-4, 6, -2]$

5)  $[2t, 4, 2t]$  og  $[6, t + 1, 3 + t]$

### Oppgave 16

Finn  $t$  og  $s$  slik at vektorene er parallelle. (Bruk Geogebra)

1)  $[-1, 2s, 4]$  og  $[3, 18, 4t + 4]$

2)  $[s, 2, 3]$  og  $[1, t, s + t]$

3)  $[t, 6, s + 1]$  og  $[s + 2, 2 + t, 3]$

4)  $[6, t + 1, s - 2]$  og  $[2(t + 1), 3, 1]$

5)  $[2, -t, s - 1]$  og  $[t - 1, -3s, 0]$



---

---

## FASIT

### Oppgave 1

1)  $2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$

2)  $2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$

3)  $-\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$

4)  $\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$

5)  $4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + \vec{e}_z$

### Oppgave 2

1)  $[2, -1, 1]$

2)  $[3, 2, 5]$

3)  $[1, -2, -2]$

4)  $[-1, -1, -1]$

5)  $[5, 7, -1]$

### Oppgave 3

1)  $[1, 4, 1]$

2)  $[1, -1, 4]$

3)  $[1, 4, 1]$

4)  $[-1, 1, 4]$

5)  $[0, 5, -3]$

6)  $[2, -1, 1]$

### Oppgave 4

1)  $[1, 0, -3]$

2)  $[-4, 0, 0]$

3)  $[1, 4, -6]$

4)  $[-3, -1, -3]$

5)  $[1, -3, 3]$

6)  $[-1, 0, 0]$

### Oppgave 5

1)  $\sqrt{6}$

2)  $\sqrt{5}$

3)  $\sqrt{10}$

4)  $\sqrt{3}$

5)  $2\sqrt{3}$

6)  $9\sqrt{14}$

7)  $3\sqrt{5}$

8)  $2\sqrt{21}$

9)  $a\sqrt{6}$

10)  $5a$

### Oppgave 6

1)  $[4, 2, 8]$

2)  $[4, -4, 8]$

3)  $[-9, -6, -3]$

4)  $[5, 10, -5]$

5)  $[-2, -3, -1]$

### Oppgave 7

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u}$  | 4) ikke parallelle              |
| 2) ikke parallelle              |                                 |
| 3) $\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$ | 5) $\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$ |

### Oppgave 8

- |       |       |
|-------|-------|
| 1) 9  | 4) 15 |
| 2) -9 |       |
| 3) 4  | 5) 1  |

### Oppgave 9

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1) 0                   | 4) -4 ikke vinkelrette |
| 2) -1 ikke vinkelrette |                        |
| 3) 0                   | 5) 0                   |

### Oppgave 10

- |       |        |
|-------|--------|
| 1) 14 | 6) 84  |
| 2) 14 | 7) 93  |
| 3) 49 | 8) 33  |
| 4) 16 | 9) -2  |
| 5) 77 | 10) 14 |

### Oppgave 11

- |       |           |
|-------|-----------|
| 1) 5  | 5) 1      |
| 2) -7 | 6) 2      |
| 3) 0  | 7) -19    |
| 4) -5 | 8) $3a^2$ |

### Oppgave 12

- |       |                          |
|-------|--------------------------|
| 1) 0  | 3) 1                     |
| 2) 70 | 4) $-a^3 - 6a^2 - a + 2$ |

### Oppgave 13

- |                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| 1) $[13, -5, -1]$ | 5) $[0, 0, 11]$ |
| 2) $[-13, 5, 1]$  | 6) $[11, 0, 0]$ |
| 3) $[6, -6, -2]$  | 7) $[0, 0, 1]$  |
| 4) $[-2, 2, 4]$   | 8) $[-1, 0, 0]$ |

### Oppgave 14

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt{2}$            | 5) $\frac{1}{3}$        |
| 2) $2\sqrt{2}$           | 6) $\frac{1}{6}$        |
| 3) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 4) 1                     | 8) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |

### Oppgave 15

- |             |            |
|-------------|------------|
| 1) $t = -2$ | 4) $t = 1$ |
| 2) $t = -2$ |            |
| 3) $t = 1$  | 5) $t = 3$ |

### Oppgave 16

- 1)  $t = -4, s = -3$
- 2)  $t = 2, s = 1$  eller  $t = -2, s = -1$
- 3)  $t = 4, s = 2$
- 4)  $t = 2, s = 3$  eller  $t = -4, s = 1$
- 5)  $t = 3, s = 1$  eller  $t = -2, s = 1$  eller  $t = 1, s = 0$